Ausgewählte Kapitel der Mathematik -

leicht verständlich

Eine Brücke vom Gymnasium zum FH – Studium

Siegfried Neuber

Tutorium

Grundlagen der Analysis (Teil 1)

Wissensbasis, Übungen mit ausführlichen Lösungen

Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Neuber (em.)

Der Autor war bis 2003 Professor für Mathematik im Studiengang ANGEWANDTE INFORMATIK der FHTW BERLIN. Er ist u.a. Mitherausgeber des LEXIKONS DER MATHEMATIK und es BI UNIVERSALLEXIKONS.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Übergang vom Mathematikunterricht an einem Gymnasium zum Vorlesungs– und Übungsbetrieb im Fach Mathematik an einer Hochschule fällt vielen Studienanfängern schwer. Oft führt dieser Umstand zu einem starken Leistungsabfall im ersten Semester. Die Vermittlung der mathematischen Inhalte erfolgt in Vorlesungen recht zügig, so dass eine Vor- und Nachbereitung durch den Lernenden unbedingt erforderlich ist.

Das *Tutorium* ist eine begleitende, ergänzende und unterstützende Übung an der Hochschule. Es soll insbesondere Anfängern, aber auch Fortgeschrittenen helfen, über die Klippen der Hochschulmathematik hinwegzukommen.

Grundlage der hier ausgewählten mathematischen Gebiete ist der im Allgemeinen übliche Grundlagenlehrplan an Fachhochschulen, wobei die mathematischen Methoden der Informatik besondere Berücksichtigung finden.

Die Auswahl der Gebiete und der Aufgaben für das *Tutorium / Grundlagen der Analysis (Teil 1)* sind meiner sehr langen Lehrerfahrung geschuldet. Es sind Aufgaben, die regelmäßig dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten, aber deren Gegenstand für das Verständnis des Lehrstoffes wichtig sind, auch oder vielleicht gerade für Anwender der Mathematik.

Die Aufgaben sind teilweise den Büchern im Literaturverzeichnis entnommen, wobei die Lösungen erheblich ausführlicher dargestellt werden, um das Verständnis schnell zu fördern.

Sollten Sie weitere Aufgabenklassen wünschen, Anregungen und Kritiken hervorbringen wollen, Fehler berichtigen, so genügt eine Information an u.s.neuber@t-online.de .

Marienwerder, 1.09.2007 Siegfried Neuber

1. Die vollständige Induktion

Wissensbasis

Wenn in einem Lehrsatz eine natürliche Zahl n auftritt, die nur der einen Bedingung unterworfen ist, nicht unterhalb eines gewissen Anfangswertes n_0 zu liegen, so kann man die Gültigkeit dieses Satzes häufig mit der Methode der (vollständigen) Induktion beweisen.

Es soll eine Aussage folgender Art bewiesen werden:

Für alle natürliche Zahlen $n \geq n_0$ gilt p(n);

kurz: $\forall n \geq n_0$: p(n).

z.B. Für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$ (Gaußsche Summenformel)

kurz: $\forall n \geq 1: \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

Das Beweisprinzip besteht aus 2 Schritten:

1. Induktionsanfang
   Man zeigt, dass p(n_0) gilt.
2. Schluss von n auf n+1; kurz: $n \to n+1$
   Für beliebiges $n \geq n_0$ setzt man die Gültigkeit von p(n) voraus und schließt auf die Gültigkeit von p(n+1), d.h. man beweist die Aussage
   $\forall n \geq n_0$: p(n) $\Rightarrow$ p(n+1)

Beispiel: $\forall n \geq 1: \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

1. Induktionsanfang

   p(n_0 =1) : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (1+1)$

   $$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

2. $n \to n+1$

   zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

Nach Voraussetzung gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1)$$
$$= (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n + 1 \right)$$
$$= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (n+2)$$

Aufgaben

Beweisen Sie folgende Aussagen:

Aufgabe 1:

$$\forall n \geq 1: \quad \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = n^2 .$$

Aufgabe 2:

$$\forall n \geq 1: \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2 .$$

Aufgabe 3: $2^n > n,\ n = 1,2,3,4,....$

Aufgabe 4: $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$; $a > -1$ fest gewählt (Bernoullische Ungleichung).

Aufgabe 5:

Die Zahl der Permutationen (Anordnungen) von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n = n!$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Aufgabe 6

Für einen beliebigen reellen Wert x_0 gelte $0 < x_0 < 1$. Ein Folge (x_n) sei durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n) \ ; \quad n=0,1,2,...$$

Zeigen Sie, dass die Glieder des Folge unterhalb der Zahl 1 bleiben.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1:

1. Induktionsanfang

n=1: $$\sum_{k=1}^{1}(2\cdot k-1)=1^2$$

1=1

2 . $n \to n+1$

zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n}(2\cdot k-1)=n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1}(2\cdot k-1)=(n+1)^2$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2\cdot k-1)=1+3+5+\ldots+2n-1+2\cdot(n+1)-1,$$

$$= n^2+2(n+1)-1=(n+1)^2$$

Aufgebe 2:

Wir benutzen bei der Rechnung das Eulersymbol (Binomialkoeffizient)

$$\binom{n}{k}:=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

z.B. $$\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$$

$$\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)\cdot n}{2!}=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

$$\binom{n+2}{2}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2!}=\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

Beweis:

1. Induktionsanfang

n=1: $$\sum_{k=1}^{1}k^3=\binom{1+1}{2}^2$$

$$1^3 = \binom{2}{2}^2 = \left(\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\right)^2 = 1$$

2. $n \to n+1$

zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \binom{n+2}{2}^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 =$$

$$= \binom{n+1}{2}^2 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot n\cdot (n+1)\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2\cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2\cdot (n+1)^2 + 4\cdot (n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot \left(n^2 + 4\cdot (n+1)\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot \left(n^2 + 4\cdot n + 4\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot (n+1)^2\cdot (n+2)^2$$

$$= \binom{n+2}{2}^2$$

Aufgabe 3:

1. n=0: $2^0 > 0$,
   $1 > 0$.
2. $n \to n+1$

Zu zeigen:

$$2^n > n \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} > n+1$$

Beweis:

Da nach Voraussetzung $2^n > n$, aber auch gleichzeitig $2^n \geq 1$, so folgt durch Addition beider Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2^n + 2^n &> n+1 \\ 2 \cdot 2^n &> n+1 \\ 2^{n+1} &> n+1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

1. n=0: $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$
   $1 > 1$.
2. $n \to n+1$

Zu zeigen:

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \quad \Rightarrow \quad (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a .$$

Nach Voraussetzung ist

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \qquad \Big| \cdot (1+a) \geq 0$$

$$\begin{aligned} (1+a)^n \cdot (1+a) &\geq (1 + n \cdot a) \cdot (1+a) \\ (1+a)^{n+1} &\geq 1 + a + n \cdot a + n \cdot a^2 \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2 \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot a . \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

1. Die Behauptung ist offensichtlich richtig für n=1 und n=2.
2. $n \to n+1$

Zu zeigen:

Wenn die Anzahl der Permutationen für n verschiedene Elemente gleich n! ist, so ist die Anzahl der Permutationen für (n+1)! $(n+1)!$.

Beweis:
Denken wir uns eines der $(n+1)$ Elemente festgehalten, so gibt es für die restlichen Elemente nach Voraussetzung n! Permutationen. Setzt man das Verfahren für alle Elemente fort, so ergeben sich (n+1) n! Permutationen,
das ist aber $(n+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = (n+1)!$

Aufgabe 6:

1.n=0: $0 < x_{n+1} < 1$ (laut Aufgabenstellung erfüllt)

2. $n \to n+1$

zu zeigen:

$$0 < x_n < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x_{n+1} < 1 .$$

Beweis:

$$x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n)$$
$$= 2 \cdot x_n - x_n^2 .$$

Da $\qquad x_n > 1$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_n < 2 \qquad (1)$$

und $\qquad x_n^2 < 1 \qquad (2)$

Durch Subtraktion (1) - (2):

$$\Rightarrow \quad \underbrace{2 \cdot x_n - x_n^2}_{x_{n+1}} < 2 - 1 = 1$$
$$x_{n+1} < 1 .$$

2. Beträge und Ungleichungen

Wissensbasis

Die Menge **R** der reellen Zahlen sowie die Menge **C** der komplexen Zahlen bilden die Grundlage des Rechnens in der Mathematik (Analysis). Deshalb sollen die wichtigsten Grundgesetze (Axiome) vorgestellt werden.

1. Die reellen Zahlen **R**

   Grundlage für das Rechnen mit Ungleichungen sind die Axiome der Anordnung.

   (1) Zu zwei reellen Zahlen x, y besteht genau eine der drei Beziehungen:

   $x<y,\ x=y,\ x>y$

   $x\leq y := x<y \wedge x=y,$

   (2) $\forall x,y,z \in R : x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$, (Transitivität)

   (3) $\forall x,y,z \in R : x<y \Rightarrow x+z < y+z$, (Monotonie der Addition)

   (4) $\forall x,y,z \in R : x<y \wedge z>0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (Monotonie der Multiplikation).

   Daraus folgen die Rechenregeln:

   $\forall x,y,z,v \in R$:

   (5) $x<y \wedge z<0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$,

   (6) $x<y \wedge z<v \Rightarrow x+z < y+v$,

   (7) $x<y \wedge z<v \wedge y,z > 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot v$,

   (8) $x<y \wedge x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

   Definition: Sei $x \in R$.

   $$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x<0 \end{cases}$$

   Die Zahl |x| heißt absoluter Betrag von x.

   Geometrische Interpretation:

   |x| ist der Abstand der Zahl x vom Nullpunkt,

   |x-y| ist der Abstand der Zahlen x,y.

   $\forall x, \varepsilon, x_0 \in R$ und $\varepsilon>0 \wedge x_0$ fest:

   (9) $|x| \geq 0$; $|-x|=|x|$; $x \leq |x|$,

   (10) $|x|=\varepsilon \Leftrightarrow x=+\varepsilon \wedge x=-\varepsilon$,

   (11) $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon$,

   (12) $|x-x_0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x_0-\varepsilon \leq x \leq x_0+\varepsilon$,

   (12a) $|x-x_0| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \geq x_0+\varepsilon \vee x \leq x_0-\varepsilon$,

   (13) $-|x| \leq x \leq |x|$,

   (14) $|x \cdot y|=|x| \cdot |y|$,

   (15) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$,

   (16) $|x^n|=|x|^n$; $n \in N$,

(17) $|x+y| \le |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung).

(18) $\forall\ n \in N,\ \forall\ x \in R$:
$n \ge 2 \wedge x > -1 \wedge x \ne 0 \Rightarrow (1+x)^n > 1+n \cdot x$ (Bernoullische Ungleichung).

2. Die komplexen Zahlen **C**

Mit der Definitionsgleichung $i^2 = -1$ besitzt eine komplexe Zahl $z = (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ die Form :
$z = x+i \cdot y$ (arithmetische Form),
$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ (trigonometrische Form), unter Beachtung der Euler – Relation $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ folgt
$z = r \cdot e^{i\varphi}$ (Exponentialform),
wobei $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ (abs. Betrag) und $\varphi = \arg z$ mit $-\pi < \varphi \le \pi$. Rechnerisch kann man φ aus $\tan\varphi = \frac{y}{x}$; $x \ne 0$ und unter Beachtung der Lage von z in der Gaußschen Zahlenebene eindeutig bestimmen.

Man nennt x auch den Realteil von z bzw. y den Imaginärteil von z, in Zeichen
$x = \mathrm{Re}(z)$ bzw. $y = \mathrm{Im}(z)$.

Sei $z = x+i \cdot y$ und $w = u + i \cdot v$. Dann gilt:

(19) $z \pm w = (x \pm u)+(y \pm v) \cdot i$,

(20) $z \cdot w = (x \cdot u - y \cdot v)+(x \cdot v + y \cdot u) \cdot i$,

(21) $\frac{z}{w} = \frac{x \cdot u + y \cdot v}{u^2+v^2} + \frac{y \cdot u - x \cdot v}{u^2+v^2} \cdot i$ (Konjugiert-komplex erweitern),

(22) $z \cdot w = r_z \cdot r_w \cdot e^{i(\varphi_z + \varphi_w)}$,

(23) $\frac{z}{w} = \frac{r_z}{r_w} \cdot e^{i(\varphi_z + \varphi_w)}$,

(24) $|e^{i\varphi}| = 1$,

(25) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

(26) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$,

(27) $|z+w| \le |z|+|w|$ (Dreiecksungleichung),

(28) $|z| = \varepsilon$ ist die Menge aller komplexer Zahlen, die vom Nullpunkt den Abstand ε haben, also alle Punkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M(0;0) und Radius $r = \varepsilon$, da

$$|z| = \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \varepsilon^2 \quad \text{(Kreisgleichung)},$$

(29) $|z-z_0| = \varepsilon$ stellt somit die Menge aller z dar, die von z_0 den Abstand ε haben, also ein Kreis mit $M(x_0,y_0)$ und dem Radius $R = \varepsilon$.

(30)

$$|z-z_0| = \varepsilon \Leftrightarrow |x+i \cdot y-(x_0+i \cdot y_0)| = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |(x-x_0)+i \cdot (y-y_0)| = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = \varepsilon^2 \quad \text{(allg. Kreisgleichung)}$$

Aufgaben

Aufgabe 1 :

Berechnen Sie die Menge L (Lösungsmenge) aller $x \in \mathbf{R}$, für die gilt:

a) $\frac{2 \cdot x + 1}{x - 1} < 1$,

b) $|x - 4| < 6$,

c) $|1 + x| \geq 4$,

d) $|\frac{3}{2}x - 2| = \frac{5}{2}$,

e) $\left|\frac{x-3}{2 \cdot x + 4}\right| < 1$,

f) $\frac{|1 + 2 \cdot x|}{1 - x} \leq 1$; $x \neq 1$.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Lösungsmenge L aller $(x, y) \in R^2$, für die gilt:

a) $(x-1)^2 \cdot (y+5) > 0$,

b) $|x \cdot y| = 1$,

c) $|x|+|y| \leq 1$,

d) $y \geq 2 - x^2$ und $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Skizzieren Sie L!

Aufgabe 3:

Welche Punktmenge M werden durch folgende Bedingungen beschrieben?

a) $|z| \leq 1$,

b) $|z-1| = 2$,

c) $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$,

d) $0 < \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}(z) < |z|$,

e) $|z + 4 \cdot i - 3| = 3$,

f) $|z| + \mathrm{Re}(z) = 1$,

g) $\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 1$,

h) $0 < a < |z| \leq b$,

i) $|z-2| + |z+2| = 4$.

Aufgabe 4:

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\forall z : |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ bzw. $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$,

b) $\forall z_1, z_2 : | z_1 - z_2 | \geq |z_1| - |z_2|$,

c) $| z_1 - z_2 | \geq | |z_1| - |z_2| |$,

d) $| z_1 - z_2 | \leq |z_1| + |z_2|$.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1a)

$$\frac{2\cdot x+1}{x-1} < 1\;;\; x\neq 1$$

1. Fall : $x - 1 > 0$ | +1 $\Rightarrow$ $x>1$ (Regel (3))

$$\frac{2\cdot x+1}{x-1} < 1 \mid \cdot\,(x - 1)>0 \qquad \text{(Regel (4))}$$

$\Leftrightarrow$ $2\cdot x + 1 < x - 1$| -x | -1 (Regel (3))

$\Leftrightarrow$ $x + 1 < -1$ $\Rightarrow$ Widerspruch zu $x>1$

$\Rightarrow$ $L_1 = \varnothing$.

2. Fall : $x - 1 < 0$ $\Rightarrow$ $x < 1$

3. $\frac{2\cdot x+1}{x-1} < 1 \mid \cdot\,(x - 1) < 0$ (Regel (5))

$\Leftrightarrow$ $2\cdot x + 1 > x - 1$

$\Leftrightarrow$ $L_2 = (-2;1)$

$\Leftrightarrow$ $L = L_1 \cup L_2 = \varnothing \cup (-2;1) = (-2;1)$.

Aufgabe 1b)

Mit WB (12) folgt $x_0 = 4$ und $\varepsilon = 6$ folgt : $|x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 6 < x < 4 + 6$

$\Leftrightarrow -2 < x < 10$

$\Rightarrow L = (-2;10)$.

Aufgabe 1c)

Ebenfalls mit WB (12a) :

$|1 + x| \geq 4 \Leftrightarrow |x - (-1)| \geq 4$

$\Leftrightarrow x \;\; -1 + 4 = 3$

$\Leftrightarrow x \leq -1 - 5 = -5$

$\Rightarrow L = R \setminus (-5;+3)$.

Aufgabe 1d)

Mit WB (10) folgt : $-\frac{3}{2}\cdot x - 2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

$$\frac{3}{2}\cdot x - 2 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Aufgabe 1e)

WB (15)

$$\left|\frac{x-3}{2\cdot x+4}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|x-3|}{|2\cdot x+4|} < 1$$

$\Rightarrow |x - 3| < |2\cdot x + 4|$.

Da die Beträge ≥ 0, kann man mit Erfolg die Aussage $\forall\; a,b\geq 0 : a<b \Rightarrow a^2<b^2$ anwenden.

$\Leftrightarrow$ $|x - 3|^2 < |\,2\cdot x + 4|^2$

$\Leftrightarrow$ $(x - 3)^2 < (2 \cdot x + 4)^2$, da $|x|^2 = x^2$
$\Leftrightarrow$ $x^2 - 6 \cdot x + 9 < 4 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 16$
$\Leftrightarrow$ $0 < 3 \cdot x^2 + 22 \cdot x + 7$
$\Leftrightarrow$ $0 < x^2 + \frac{22}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$ (#)

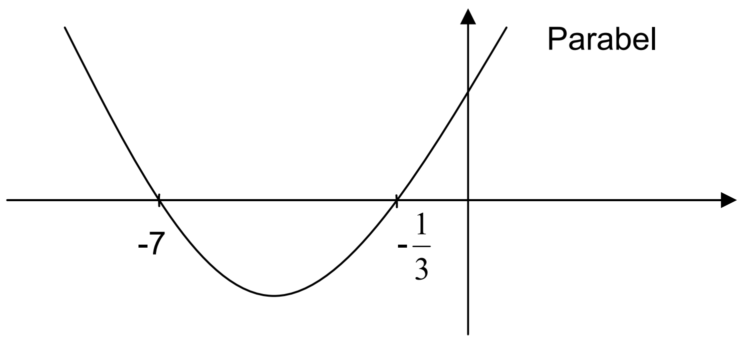
Man betrachtet die Gleichung $x^2 + \frac{22}{3} \cdot x + \frac{7}{3} = 0$ (*) und benutzt die quadratische Ergänzung :

$$\underbrace{\left(x + \frac{11}{3}\right)^2 - \frac{121}{9}}_{x^2 + \frac{22}{3} \cdot x} + \frac{7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{11}{3}\right| = \frac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{11}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ x + \frac{11}{3} = -\frac{10}{3} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

Das sind die Nullstellen der Gleichung (*) :



Ungleichung (#) meint aber alle x für die $y(x) > 0 \Rightarrow x < -7 \vee x > -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow L = R \setminus \left[-7; -\frac{1}{3}\right].$$

Aufgabe 1f)

$$\frac{|1 + 2 \cdot x|}{1 - x} \leq 1$$

1. Fall : $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

$$\frac{|1 + 2 \cdot x|}{1 - x} \leq 1 \quad | \ (1 - x) > 0 \quad \text{WB (4)}$$

$|1 + 2 \cdot x| \leq 1 - x$.

Da beide Seiten der Ungleichung < 0, so kann man quadrieren :

$(1 + 2 \cdot x)^2 \leq (1 - x)^2$
$\Rightarrow$ $1 + 4 \cdot x + 4 \cdot x^2 \leq 1 - 2 \cdot x + x^2$
$\Leftrightarrow$ $3 \cdot x^2 + 6 \cdot x \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 2 \cdot x \le 0$
$\Leftrightarrow$ $(x + 1)^2 - 1 \le 0$
$\Leftrightarrow$ $|x + 1|^2 \le 1$
$\Leftrightarrow$ $-2 \le x \le 0$ (WB (12) : $x_0 = -1$; $\varepsilon = 1$).
Unter Beachtung der Voraussetzung $x < 1$, folgt als Teillösung $L_1 = [-2;0]$.

2. Fall : $1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$$\frac{|1 + 2 \cdot x|}{1 - x} \le 1 \quad | \ (1 - x) < 0 \quad \text{WB (4)}$$

$$|1 + 2 \cdot x| \ge 1 - x.$$

Da die linke Seite der Ungleichung nicht – negativ und die rechte Seite der Ungleichung negativ, lässt sich das Quadrieren der Gleichung nicht anwenden, sondern man muss für den Term $|1 + 2 \cdot x|$ eine Fallunterscheidung durchführen.

(α) $1 + 2 \cdot x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $1 + 2 \cdot x \ge 1 - x$
$3 \cdot x \ge 0$
$x \ge 0$ und $x > 1$ und $x \ge -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $L_{21} = (1;+\infty)$.

(β) $1 + 2 \cdot x < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ steht im Widerspruch zu $x>1$
$\Rightarrow$ $L_{22} = \emptyset$.

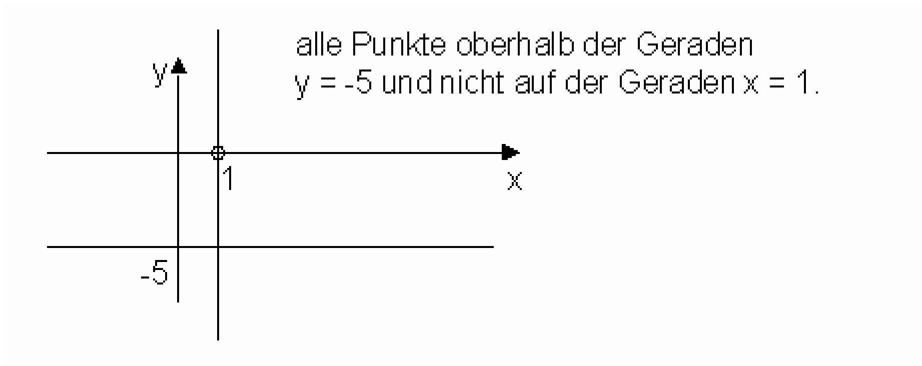
Damit ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_{21} \cup L_{22}$$
$$= L_1 \cup L_{21}$$
$$= [-2;0] \cup (1;+\infty).$$

Aufgabe 2a)

$(x - 1)^2 \cdot (y + 5) > 0$
Da $(x - 1)^2$ stets ≥ 0 muss auch $y + 5 > 0$ sein.
Da das Produkt positiv sein soll, folgt
$(x - 1)^2 > 0 \wedge y + 5 > 0 \Rightarrow |x - 1| > 0 \wedge y + 5 > 0$
$\Rightarrow x \ne 1 \wedge y > -5$

Skizze



Aufgabe 2b)

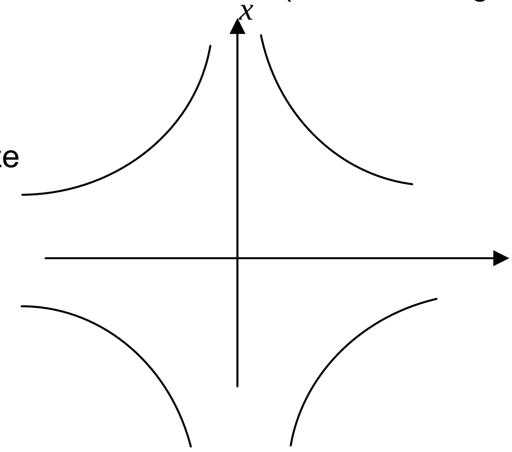
$|x \cdot y| = 1 \quad \Rightarrow \quad$ WB (14) $|x| \cdot |y| = 1$

$\Rightarrow |y| = \dfrac{1}{|x|} \; ; \; x \neq 0$

$\Leftrightarrow y = \pm \dfrac{1}{|x|}$

$= \pm \dfrac{1}{x}$ (Def. d. Betrages)

Skizze



Aufgabe 2c)

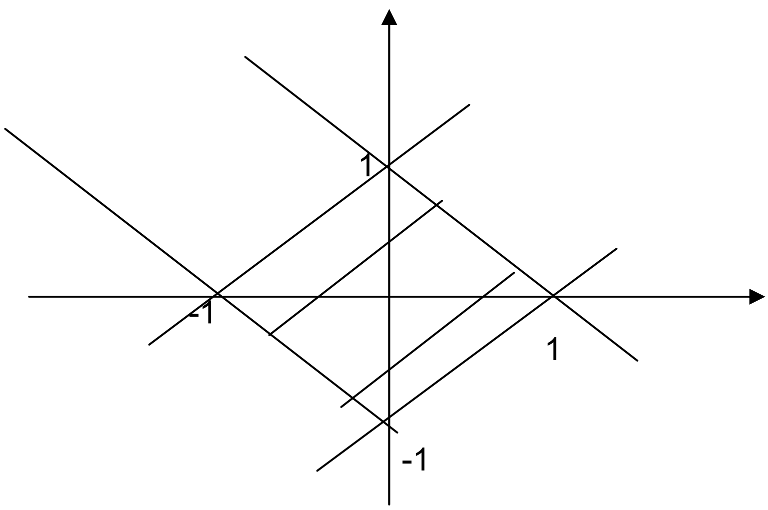
$|x| + |y| \leq 1 \quad \Rightarrow |y| \leq 1 - |x|$

$\Rightarrow y \geq 0 : \; y \leq 1 - |x|$

$y < 0 : -y \leq 1 - |x|$

$y \geq |x| - 1$

Skizze



Aufgabe 2d)

$y \geq 2 - x^2 \wedge x^2 + (y-2)^2 = 4$

$y = -x^2 + 2$ ist die Parabel

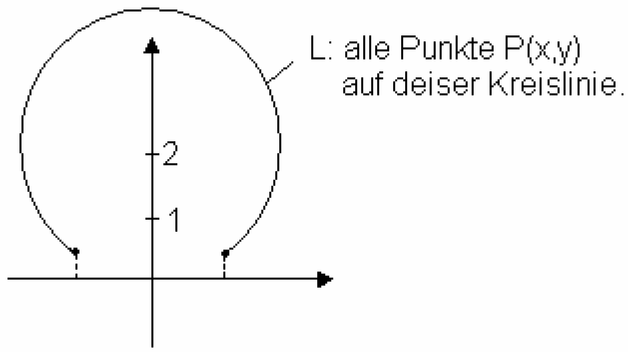
Die allgemeine Kreisgleichung lautet :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Dann ist obige Gleichung ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(x ;y) = M(0;2) und Radius r=2.

Beide Bedingungen werden von allen Punkten P(x, y) gefüllt, die auf dem Kreis liegen, mit Ausnahme der Punkte des Kreises, die auf dem Kreisbogen P_1P_2 liegen.

Skizze



Aufgabe 3

a) M ist die Menge aller Punkten innerhalb und auf dem Rande des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ (vgl. WB (28)).
b) M ist die Menge aller Punkte auf dem Rande des Kreises $(x-1)^2 + y^2 = 4$; $x_0=1$; $y_0=0$; (vgl. WB (29)).
c) Es ist φ = arg z ; d.h. $|\arg z| = |\varphi| < \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt mit $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$; r beliebig; dass M die Menge aller z ist, die im I und IV Quadranten liegen.
d) Sei z = x +iy.

Dann ist Im(z) = y und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$0 < \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}(z) < |z| \Rightarrow 0 < \sqrt{2} \cdot y < \sqrt{x^2 + y^2} \quad | \uparrow 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot y^2 < x^2 + y^2$

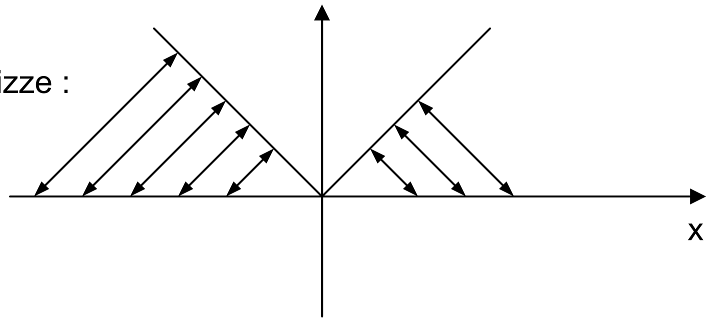
$\Leftrightarrow y^2 < x^2 \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow |y| < |x| \quad (*)$

Aus $\sqrt{2} \cdot y > 0$ folgt y > 0 und somit ergibt sich aus (*) y< |x| ;

also ist M = {z= (x,y) | y>0 $\wedge$ y<|x| }

Skizze :



e) $|z + 4i - 3| \Rightarrow |z - (3 - 4i)| = 3$

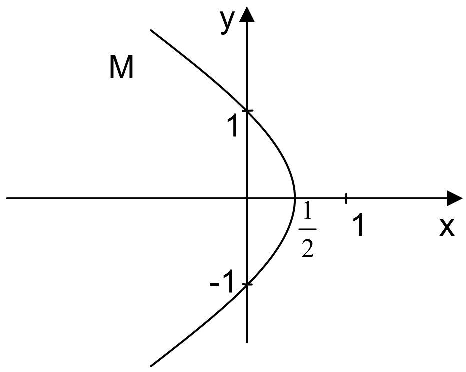
$\Rightarrow$ mit $|z - z_0| = \varepsilon$ (vgl. WB (29))

$z_0 = 3 - 4i = (3;-4) \wedge \varepsilon = 3$

Also ist M die Menge aller Punkte auf dem Rande des Kreises

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

f) $|z| + \mathrm{Re}(z) = 1$ mit $z = x + iy$.



$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - x \quad | \uparrow 2; (1 - x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2 \cdot x + x^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 - 2 \cdot x$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - 2x}$; $1 - 2 \cdot x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

g) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1 \quad | \cdot (z \cdot \bar{z})$

$\Leftrightarrow \bar{z} + z = z \cdot \bar{z}$; $z = x + iy$: $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 2 \cdot x = x^2 + y^2$ (quadratische Ergänzung)

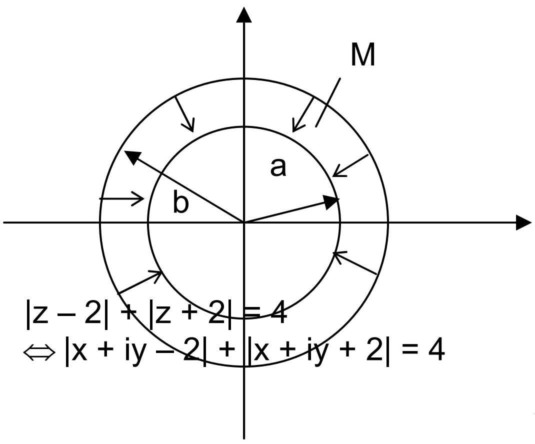
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ M ist die Menge aller Punkte auf dem Rande des Kreises mit $x_0 = 1$; $y_0 = 0$ und $r = 1$.

h) $|z| > a$ sind alle z außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $M_0(0;0)$ und dem Radius $r = a$; $|z| \leq b$ sind alle z der Kreisscheibe (Inneres und Rand) mit M(0;0) und $r = b > a$. Also ist die gesuchte Punktmenge M die Menge aller z eines Kreisringgebiets.

Skizze



i) $|z - 2| + |z + 2| = 4$

$\Leftrightarrow |x + iy - 2| + |x + iy + 2| = 4$

$\Leftrightarrow$ |(x – 2) + iy| + |(x + 2) + iy| = 4

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 4 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$ (*)

Beachte: Die Quadratur eine Gleichung ist nicht in jedem Falle eine äquivalente Umformung; und zwar ist hier die linke Seite der Gleichung stets nicht-negativ (Wurzeldefinition), aber die rechte Seite kann durchaus negativ werden. Aus a=b folgt zwar $a^2=b^2$, jedoch nicht umgekehrt; z.B. $(-1)^2=(1)^2$ daraus folgt nicht –1=+1!

Quintessenz: Es geht mit einem Implikationspfeil weiter und die sich am Schluss ergebende Lösung muss an der Ausgangsgleichung überprüft werden.

(*) $\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 16 - 8\cdot\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 8\cdot\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8\cdot(x+2)$

$\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow y = 0$

$\Leftrightarrow |y| = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$

Wir haben gefunden, dass alle Punkte z = x + iy die Ausgangsgleichung erfüllen, falls y=0, also alle Punkte z= x.

Um umgekehrt zu prüfen, ob alle Punkte z= x die Ausgangsgleichung erfüllen, oder ob zusätzliche Bedingungen gefordert werden müssen, setzen wir z = x in die Ausgangsgleichung ein:

$|x-2| + |x+2| = 4$

1. Fall. $x< -2$: $|x-2| + |x+2| = -(x-2) - (x+2) = -2x > 4$,
2. Fall. $-2\leq x\leq +2$: $|x-2| + |x+2| = -(x-2) + (x+2) = 4$,
3. Fall. $x>2$: $|x-2| + |x+2| = (x-2) + (x+2) = 2x > 4$.

Nur Fall 2 trifft zu, also ergibt sich letztendlich als Punktmenge
$M = \{z=(x, y) \mid y=0 \wedge -2\leq x\leq +2\}$; d.h. alle Punkte längs der Strecke von –2 bis +2 auf der x-Achse.

Aufgabe 4

a) Zu zeigen : $\forall z\in C : |Re(z)| \leq |z| : z=x + iy$

$\Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow |x|\leq x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2\leq x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 0\leq y^2$, was stets richtig ist ;

analog beweist man $|Im(z)|\leq|z|$.

b) $|z_1| = |z_1 - z_2+ z_2|$ (man addiert 0 = -z + z)

$= |(z_1 - z_2) + z_2|$ (Anwenden der Dreiecksungleichung WB (26))

$\leq |z_1 - z_2| + |z_2|$

$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

c) Nach b) gilt : $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ und $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$.
Fasst man beide Aussagen zusammen, so folgt die Behauptung.

d) Dreiecksungleichung :

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2| \leq |z_1 + (-z_2)|$

$\leq |z_1| + |-z_2|$

$= |z_1| + |z_2|$

3. Angewandte eindimensionale Extremalprobleme

Wissensbasis

Auf ein reales System wirken n Eingangsgrößen $x_1, x_2, ..., x_n$ ein. Das System reagiere mit einer Ausgangsgröße y. Der Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und der Ausgangsgröße y werde durch die Gleichung

$$(1) \qquad y = g(x_1, ..., x_n) \quad (\text{ Zielfunktion })$$

beschrieben.

Da wir bisher nur die Differentialrechnung für eine unabhängige Veränderliche beherrschen, müssen (n-1) Variable über Nebenbedingungen , die sich in der Regel aus der Aufgabenstellung ergeben , aus (1) eliminiert werden , so dass eine Gleichung der Form

$$(2) \qquad y = f(x) \;,\; x \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}.$$

I ist ein so genannter zulässiger Bereich, der sich aus der praktischen Aufgabenstellung ergibt.

Es ist nun dasjenige $x_0 \in D_f$ zu ermitteln, für das $f(x_0) = \max_{x \in Df} f(x)$ (absolutes Maximum) bzw. $f(x_0) = \min_{x \in Df} f(x)$ (absolutes Minimum) ist.

2. Berechung absoluter Extrema von f auf einem Intervall I = [a,b] bei gegebener textlicher Problembeschreibung:

   a) Aufstellen der Zielfunktion f unter Beachtung der sich aus dem Text ergebenden Nebenbedingungen.

   b) Lösen der Gleichung
   $$(3) \qquad f'(x) = 0 \quad \text{über } \mathbf{I}.$$

   Besitzt diese Gleichung genau eine Lösung $x = x_0$, so ist der relative Extremwert $f(x_0)$ gleichzeitig der gesuchte absolute Extremwert.
   (Auf die Kontrolle über die 2. Ableitung kann verzichtet werden.)

3. Ein Beispiel

Problem : Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang U = 2L soll das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A bestimmt werden.

Zielfunktion : Sei x die Länge des Rechtecks und y seine Breite.
Dann berechnet man (4) A = g(x,y) = x y mit der

Nebenbedingung U = 2l = 2x + 2y $\Rightarrow$ x+y = L $\Rightarrow$ y = L-x .
Ersetzt man in (4) y durch L – x, so erhält man schließlich
Die gesuchte Zielfunktion von einer unabhängigen Variablen x.

(5) A = f(x) = x (L – x) mit dem zulässigen Bereich **I** = (0 , L) ,
denn für x = 0 bzw. x = L ist A = 0 (praktisch uninteressant).

Lösen der Gleichung f′ (x) = 0 :

$$f'(x) = (L - x) + x(-1) = L - 2x = 0 \Rightarrow x = x_0 = \frac{L}{2} \in I \text{ (eindeutig),}$$

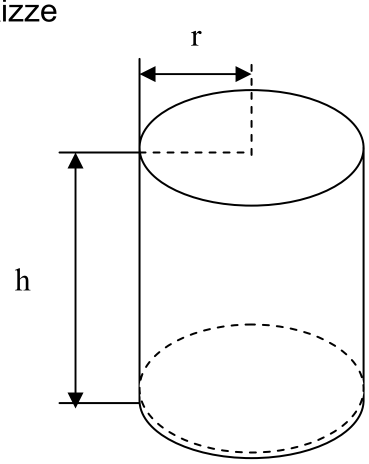
also ist $y = y_0 = \frac{L}{2}$ und der absolut Extremwert, d.h. der maximale

Flächeninhalt $A_{max} = x_0 y_0 = \frac{L}{2}\frac{L}{2} = \frac{L^2}{4}$

Aufgaben

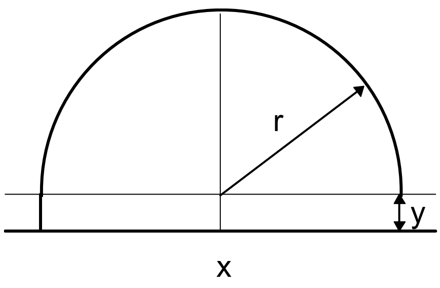
Aufgabe 1
Es soll eine umweltfreundliche Konservendose mit vorgegebenem Volumen V hergestellt werden. Wie sind Radius r und Höhe h des Zylinders zu wählen, damit der Materialverbrauch (Oberfläche des Zylinders) ein Minimum wird?

Skizze



Aufgabe 2

Ein Tunnel von skizzierter Form soll eine Querschnittsfläche von 50 m^2 haben. Wie sind die Abmessungen x und y zu wählen, wenn der armiert auszubauende Umfang des Querschnittes ein Minimum werden soll?



Aufgabe 3

Man bestimme $x_0 \in [0,1]$ so, dass die Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = (x-1)^2$ im Punkt $P(x_0; y_0)$ vom 1.Quadranten $(x > 0; y > 0)$ ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt abschneidet. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Aufgabe 4

Zur wirtschaftlichen und industriellen Erschließung eines bestimmten Gebietes wird ein Kanalbau geplant. Der Verlauf dieses Kanals kann durch die Gerade $2x - y - 11 = 0$, ein in der Nähe befindlicher Fluss kann für das in Frage kommende Gebiet durch die Parabel $y = x^2$ annähernd beschrieben werden. Zwischen Fluss und Kanal soll ein geradliniger Verbindungskanal kürzester Länge angelegt werden.

a) Man fertige eine Skizze an.
b) Man berechne die Koordinaten der Einmündungen des Verbindungskanals im Fluss und im Kanal.

Aufgabe 5

Für die Beleuchtungsstärke in einem Punkt einer von einer Lampe beleuchteten ebenen Fläche gilt:

$$B = \frac{L \cdot \sin\alpha}{a^2}$$

(L=const., Lichtstärke der Lampe; a ist die Entfernung Lampe - Flächenpunkt; α ist der Neigungswinkel der Strahlen gegen die Fläche). In welcher Höhe h über der Mitte eines kreisförmigen Tisches (Radius R) muss die Lampe angebracht werden, damit die Beleuchtungsstärke am Rande des Tisches ein Maximum wird?

Aufgabe 6

Aus einem Baumstamm mit annähernd Kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d soll ein rechteckiger Balken von möglichst großes Tragkraft $W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2$ herausgeschnitten werden. Wie sind die Rechteckseiten b und h zu wählen?

Aufgabe 7

Gegeben seien die Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x_i \in R \quad (i = 1, \ldots, n)$.
Gesucht ist die reelle Zahl x, für die die Summe der Abweichungsquadrate
$(x_i - x)^2$
ein Minimum wird.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1

Die Oberfläche O des Zylinders setzt sich aus der kreisförmigen Grund- und Deckfläche und dem Mantel zusammen:

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \\ (1) \quad &= 2 \cdot \pi \cdot \left(r \cdot h + r^2\right) \\ &= g(r; h) \end{aligned}$$

Aus der Nebenbedingung $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ erhält man $h = \dfrac{v}{\pi \cdot r^2}$;

eingesetzt in (1):

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \left(r \frac{V}{\pi \cdot r^2} + r^2 \right) = f(r); \quad r > 0$$

$$O'(r) = 2 \cdot \pi \cdot \left(- \frac{V}{\pi \cdot r^2} + 2 \cdot r \right) = 0$$

$$-V + 2 \cdot \pi \cdot r^3 = 0$$

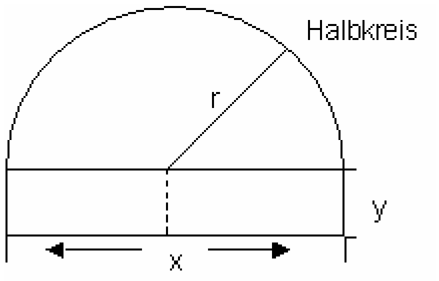
$$r^3 = \frac{V}{2 \cdot \pi}; \quad r > 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}};$$

$$\Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4 \cdot \pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\dfrac{V^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot V}{2 \cdot \pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}} = 2 \cdot r$$

Aufgabe 2

Skizze



Querschnittfläche $A_q = 50\,m^2$ und U_g sei der armiert auszubauende Umfang des Querschnitts. Zielfunktion: $U_g = 2\cdot y + x + \pi \cdot \frac{x}{2}; \quad r = \frac{x}{2}$

$$= g(x,y) \to \min$$

$$A_q = x\cdot y + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 50$$

$$\Rightarrow x\cdot y + \pi\cdot\frac{x^2}{8} = 50$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{50}{x} - \frac{\pi}{8}\cdot x$$

Setzt man die rechte Seite der letzten Gleichung in die Zielfunktion U_g ein, so folgt

$$U_g = f(x) = \frac{100}{x} - \frac{\pi}{4}\cdot x + x + \frac{\pi}{2}\cdot x; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{100}{x^2} - \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{2} = 0$$

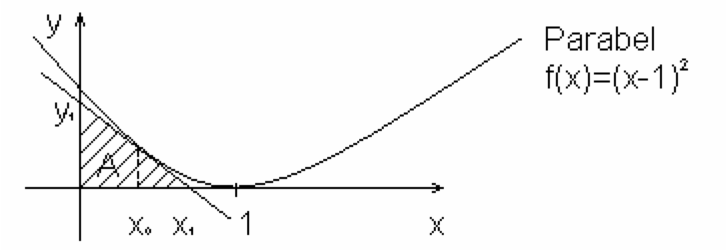
$$\Rightarrow x^2 = \frac{100}{1+\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow x > 0 \,:\, x = 7{,}48 \wedge y = 3{,}75$$

$$\Rightarrow U_{g_{\min}} = f(7{,}48) = 26{,}72$$

Aufgabe 3

Skizze:



Gleichung der Tangente in $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - (x_0 - 1)^2 = 2(x_0 - 1)(x - x_0)$$
$$y = 2(x_0 - 1)(x - x_0) + (x_0 - 1)^2$$
$$\Rightarrow y = (x_0 - 1)\ [2(x - x_0) + (x_0 - 1)]$$
$$\Rightarrow y = (x_0 - 1)\ [2x - 2x_0 + x_0 - 1]$$
$$\Rightarrow y = (x_0 - 1)\ [2x - x_0 - 1]$$
$$\Rightarrow y = 2x(x_0 - 1) - (x_0 - 1)(x_0 + 1)$$
$$\Rightarrow y = 2x(x_0 - 1) + 1 - x_0^2$$

Schnittpunkt der Tangente mit den Achsen:

$$x = 0: \quad y_1 = 1 - x_0^2 \qquad (1)$$
$$y = 0: \quad 2(x_0 - 1)\ x_1 + 1 - x_0^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + 1) \qquad (2)$$

Die Zielfunktion ist

$$A = g\ (x_1; y_1) = \frac{1}{2} x_1 \cdot y_1 \quad .$$

Man benötigt aber A in Abhängigkeit von x_0 (vgl. Aufgabenstellung);
d.h. x_1 bzw. y_1 sind durch (1) und (2) zu ersetzen:

$$A = f(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+x_0)(1-x_0^2) \;;\; x_0 \in [0;1]$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}x_0^3 - \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{4}$$

$$f'(x_0) = -\frac{3}{4}x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Big|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad x_0^2 + \frac{2}{3}x_0 - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x_0)_{1;2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$(x_0)_1 = \frac{1}{3}$$

$$(x_0)_2 = -1 \quad \notin [0;1]$$

Damit ist $x_0 = \frac{1}{3}$ eindeutige Lösung in $[0;1]$ und

$x_1 = \frac{2}{3}$; $y_1 = \frac{8}{9}$ $\Rightarrow$ $A_{max} = \frac{8}{27}$.

Aufgabe 4

Sei d der Abstand der Punkte P_1 und P_2; d.h.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = g(x_1, x_2, y_1, y_2)$ (Zielfunktion).

$\overline{P_1P_2} \perp (g_1 \wedge g_2) \Rightarrow$ d ist minimal; weiter gilt $g_1 \parallel g_2$. Drei Variable des Arguments müssen eliminiert werden.

$g_2 : y = 2\cdot x - 11$

g_1 ist Tangente zu $y = x^2$ an der Stelle $x = x_1$,

also folgt $y_1 = x_1^{\,2} \wedge y'(x_1) = 2\cdot x_1 = 2$ (Anstieg von g_1)

$\Rightarrow x_1 = 1$

$$y_1 = x_1^2 = 1$$

$\Rightarrow P_1$ (1;1).

Dann ergibt sich für

$$d = \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (2 \cdot x_2 - 11 - 1)^2} = \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (2 \cdot x_2 - 12)^2} = f(x_2);\, x_2 > 0$$

Rechenvorteil: $h(x) = \sqrt{r(x)} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{r(x)}} \cdot r'(x) = 0$

$$\Rightarrow r'(x) = 0$$

Es genügt also den Radikanden $(x_2 - 1)^2 + (2 \cdot x_2 - 12)^2 = r(x_2)$

zu differenzieren: $(x_2 - 1)^2 + (2 \cdot x_2 - 12)^2 \cdot 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot x_2 - 2 + 8 \cdot x_2 - 48 = 0$$

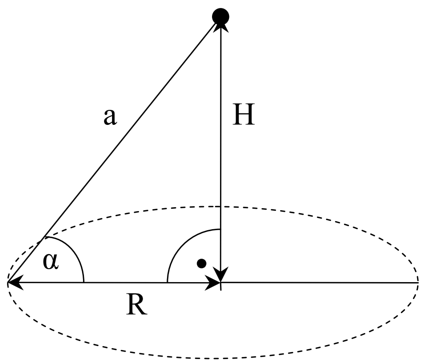
$$x_2 = 5$$

$$y_2 = 2 \cdot x_2 - 11 = -1$$

$\Rightarrow P_2$ (5;-1).

Aufgabe 5

<u>Skizze:</u>



Die Zielfunktion ist im Text gegeben:

$$B = g(\alpha; a) = L \cdot \frac{\sin \alpha}{a^2}$$

Die Größen α und a müssen durch R und H ersetzt werden, wobei H variabel ist und R fest. Dies geschieht durch den Pythagoras:

$\sin\alpha = \dfrac{H}{a}$ und $a = \sqrt{R^2 + H^2}$

$\Rightarrow \qquad B = f(H) = L \cdot \dfrac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}^{\,3}} \;;\; H > 0$

Für die Differentiation ist folgende Schreibweise zweckmäßig:

$$B = f(H) = L \cdot H \cdot \left(R^2 + H^2\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(H) = L \cdot \left[1 \cdot \left(R^2 + H^2\right)^{-\frac{3}{2}} + H \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) \cdot \left(R^2 + H^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot H\right] = 0$$

$\Rightarrow \qquad f'(H) = L \cdot \left[\left(R^2 + H^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot H^2 \cdot \left(R^2 + H^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right] = 0$

Teilt man diese Gleichung durch L und multipliziert sie mit $\left(R^2 + H^2\right)^{\frac{5}{2}}$, so folgt:

$$R^2 + H^2 - 3 \cdot H^2 = 0$$
$$2 \cdot H^2 = R$$

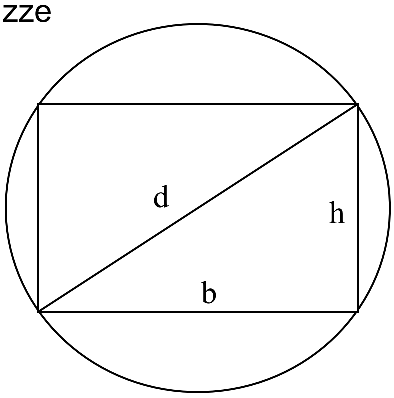
$\Rightarrow \qquad$ mit $H > 0 \wedge R > 0$: $H = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

(eindeutige Lösung im zulässigen Definitionsbereich D_f)

$H = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ ist die optimale Höhe.

Aufgabe 6

Skizze



W $= \dfrac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = g(b;h)$

$d^2 = b^2 + h^2$

$\Rightarrow$ W $= \dfrac{1}{6} \cdot b \cdot \left(d^2 + b^2\right)$

$= \dfrac{1}{6} \cdot b \cdot d^2 - \dfrac{1}{6} \cdot b^3 = f(b); \quad b > 0$

$\Rightarrow$ W‘ $= \dfrac{1}{6} \cdot d^2 - \dfrac{1}{6} \cdot b^2 = 0$

$\Rightarrow$ $b^2 = \dfrac{1}{3} + d^2$ und mit $b > 0$: $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3} \cdot d$.

Aus $h^2 = d^2 - b^2$ folgt $h^2 = d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2 = \frac{2}{3} \cdot d^2$

und mit $h > 0$: $h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot d$.

Aufgabe 7

Summe der Abweichungsquadrate $(x_i - x)^2$

heißt : $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 = f(x)$, $x > 0$ (Zielfunktion)

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx} \cdot (x_i - x)^2 = 0 \quad \text{(Summenregel)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (x_i - x) \cdot (-1) = 0$$

$$\Rightarrow (-2) \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = 0 \quad \Big| : (-2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(arithm. Mittel)}$$

4. Der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung

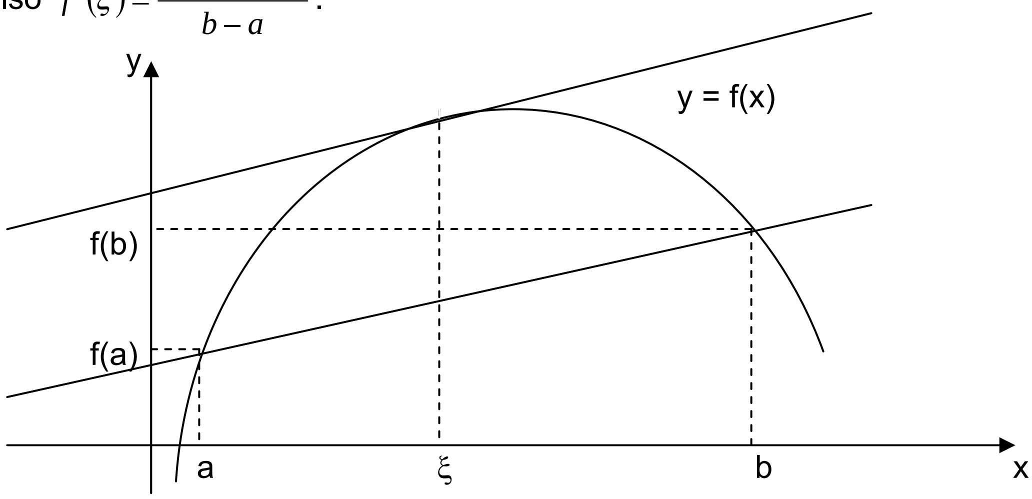
Wissensbasis

Der 1. Mittelsatz der Differentialrechnung, auch Satz von Lagrange genannt, spielt bei vielen theoretischen Betrachtungen und praktischen Berechnungen, z.B. die numerische Berechnung eines Funktionswertes aus einem bekannten Nachbarwert, eine große Rolle.

Erster Mittelwertsatz
Ist eine Funktion f mit der Gleichung y= f(x) im Intervall [a, b] stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es im Innern des Intervalls mindestens einen Zwischenwert ξ (Mittelwert), für den die Gleichung gilt :

(1) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ mit $a<\xi<b$.

geometrische Interpolation (vgl. Abbildung) :
Der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt den Anstieg der Kurvensekante durch die Punkte (a; f(a)) und (b; f(b)) an. Es gibt mindestens eine Stelle ξ, für die die Tangente an die Kurve parallel zur Kurvensekante ist, d.h. beide haben denselben Anstieg, also $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Andere Darstellungen der Gleichung (1) :
Setzt man a = x und b = x+h $h\neq 0$, so kann ξ in der Form $\xi=a+\nu h$: $(0<\nu<1)$ geschrieben werden. Dann folgen aus (1) die Gleichungen

(2) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\nu h)$ mit $0<\nu<1$;

(3) $\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\Delta y} = h \cdot f'(x+\nu h)$,

$\Delta y = h \cdot f'(x+\nu h)$,

(4) $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\nu h)$.

Beispiel 1 :

Man berechne ξ für $y = f(x) = \ln x$; $x\in[1; e]$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\xi} = \frac{1-0}{e-1}$$

$$\Rightarrow \xi = e-1$$

Beispiel 2 :

Es soll folgender Satz bewiesen werden :

Ist f(x) an jeder Stelle des Intervalls (a, b) differenzierbar und ist dort $f'(x)=0$ für jedes x, so ist f(x) in [a, b] konstant.

Beweis : Sie a+h (h>0) eine beliebige Stelle des Intervalls [a, b], so erfüllt f(x) im Intervall (a, a+h) die Voraussetzung des Mittelwertsatzes.

Folglich existiert ein ξ ($a<\xi<a+h$), so dass:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\xi).$$

Da nach Voraussetzung $f'(\xi)=0$,folgt $f(a+h) - f(a)=0$, daraus $f(a+h)=f(a)$; also ist f(x) konstant im gesamten Intervall [a, b], da h beliebig.

Beispiel 3 :

Man beweise folgende Ungleichung:

$$\forall x\in R : |\sin y - \sin x| \leq |y-x|$$

Beweis : Mit x+h = y und Gleichung (2) folgt :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \text{ ; } f(x)=\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin y - \sin x}{y-x} = \cos\xi$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sin y - \sin x}{y-x}\right| = |\cos\xi| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\sin y - \sin x| \leq |y-x|$$

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\ln x$, $x\in[1; 3]$. Berechnen Sie den Mittelwert ξ. Interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 2

Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $f(x)=x^2$, $x\in[a, b]$ an, d.h., bestimmen Sie ξ. Welcher Wert von ν entspricht diesem ξ?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Stelle ξ, an der die Ableitung der Funktion $y=e^x$ mit dem zu Intervall $[x_0, x_0+h]$ gehörigen Differenzenquotienten dieser Funktion übereinstimmt. Berechne auch ν!

Aufgab 4

Zeigen Sie, dass $\forall x\in R : e^x > 1+x$.

Aufgabe 5

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ werden durch den Wert $-\frac{a}{2}$ voneinander getrennt, falls sie reell sind. Zeigen Sie das!

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=(\ln\xi)'=\frac{1}{\xi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln 3-\ln 1}{3-1}=\frac{1}{\xi} \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{\xi}=\frac{\ln 3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \xi=\frac{2}{\ln 3}$$

Interpretation : Im Punkt P mit der Abszisse $\xi=\frac{2}{\ln 3}$ ist die Tangente an die Kurve y=ln x parallel zu Sehne durch die Punkte $P_1(1; 3)$ und $P_2(3; \ln 3)$.

Aufgabe 2

Die Voraussetzungen sind erfüllt, da $f(x)=x^2$ in R differenzierbar und $f'(x)=2x$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=2\xi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(b+a)(b-a)}{b-a}=2\xi$$

$$\Rightarrow \quad \xi=\frac{1}{2}(a+b).$$

und $\xi = a+\nu h = a+\nu(b-a)$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} = a + \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - a = \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(b-a) = \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3
„Differenzenquotient“ ist nur ein Synonym für Anstieg der Sekante ; f(x)= e^x ist in **R** überall differenzierbar.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \left(e^x\right)_{x=x_0+\nu\cdot h} \quad ; \ 0<\nu<1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0+\nu\cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h}\left(e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}\right) = e^{x_0}\cdot e^{\nu\cdot h} \qquad | : e^{x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h}\left(e^h - 1\right) = e^{\nu\cdot h} \qquad | \ln$$

$$\Rightarrow \quad \ln e^{\nu\cdot h} = \ln\frac{e^h-1}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \nu\cdot h\cdot \ln e = \ln\frac{e^h-1}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{h}\cdot\ln\frac{e^h-1}{h}$$

Aufgabe 4
Wir wählen f(x)=e^x und a=0 und b= x.

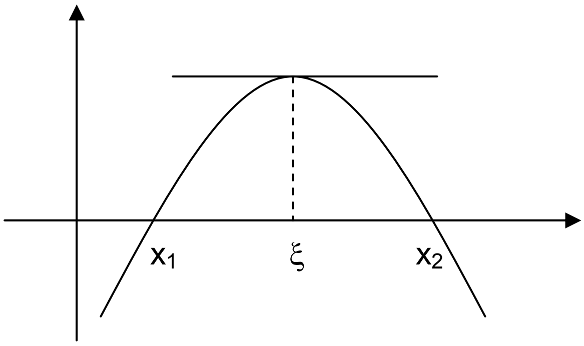
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \left(e^x\right)'_{\nu_x} \quad ; \ \xi = a+\nu(b-a) = 0+\nu x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^x - e^0}{x} = e^{\nu_x}$$

$\Rightarrow$ $e^x-1 = xe^{\nu x}$
$x>0 : e^{\nu x} >1 \ | \cdot x>0$
$xe^{\nu x} >x$, also
$e^x-1 = xe^{\nu x} >x$
$\Rightarrow$ $e^x >1+x$
$x<0 : e^{\nu x} <1 \ | \cdot x<0$
$xe^{\nu x} >x$, woraus wiederum die Behauptung folgt.

Aufgabe 5

Sekante : P1(x1; 0) und P2(x2; 0)
a=x1 ; b=x2



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{0-0}{x_2 - x_1} = \left(x^2 + ax + b\right)'_{x=\xi}$$

$\Rightarrow$ 0 = 2ξ+a

$$\Rightarrow \xi = -\frac{a}{2}$$

5. Taylorformel für beliebige Funktionen

Wissensbasis

1. Satz von Taylor für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

Sei f in einer ε-Umgebung U im Nullpunkt (n+1) – mal differenzierbar, und sei x ∈ **U .** Setzt man

(1) f (x) = $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x)$, dann existiert eine Zahl

$\vartheta \in (0;1)$ mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

$T_n(x)$ heißt Taylorpolynom n.ten Grades.

2. Die Funktion f wird durch das Taylorpolynom $T_n(x)$ in der Umgebung von x_0 = 0 gut approximiert; d.h., es ist f(x)≈$T_n(x)$, falls für den absoluten Fehler gilt:

$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \to 0 \, (n \to \infty)$ *für festes* $x \in$ **U.**

Diese Aussage bedeutet , dass man für x den Funktionswert f(x) beliebig genau approximieren kann, wenn man die Zahl n nur hinreichend groß wählt.
Die Menge aller x, für die das Restglied $R_n(x)$ gegen Null konvergiert, nennt man Konvergenzintervall .

Ist die Funktion f <u>beliebig oft</u> differenzierbar und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, so kann man f durch eine unendliche Reihe (Taylorreihe von f genannt) darstellen :

(2) $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad \text{für alle } x\in \mathbf{U}$$

3. Für praktische Belange genügt oft eine ungefähre Abschätzung , und zwar

(3) $$R_n(x)\approx\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}$$.(vereinfachtes Restglied)

Dies ist zulässig, falls sich $f^{(n+1)}(x)$ nicht erheblich mit x ändert. Es ist also nichts anderes als das (n+1)- te Glied der Taylorentwicklung im Nullpunkt.

4 . Falls man die Taylorentwicklungen für die Funktionen f(z) und z = g(x) kennt, kann man durch Einsetzen der Reihe für g in f die Entwicklung der verketteten Funktion f(g(x)) herleiten, indem man abschließend nach Potenzen von x ordnet und das Konvergenzintervall unter Beachtung der Konvergenzintervalle von f , g berechnet .

5. Sei z^* ein Näherungswert einer reellen Zahl z mit n Stellen nach dem Komma. Dann gilt für den absoluten Fehler:

(4) $$|z-z^*|\le\frac{1}{2}10^{-n}$$ (Rundungsfehler) .

Aufgaben

Aufgabe 1

Stellen Sie für die Funktion $y=e^x$, $x\in$ **R** im Punkte $x_0=0$ die Taylorformel auf !

Aufgabe 2:

Geben Sie für die Funktion f(x)= e^x das vereinfachte Restglied $R_n(x)$ an !

Aufgabe 3 :

Mit der Funktion

$f(x)=(1-x)^x$ *und einem geeignetem Taylorpolynom* $T_3(x)$ *berechne man näherungsweise* $\sqrt[5]{0{,}8}$ *auf 3 Stellen nach dem Komma genau. Wie groß ist der absolute Fehler?*

Aufgabe 4:

Wie groß n in $T_n(x)$ für $f(x) = e^x$ gewählt werden, damit $\sqrt{e}$ auf mindestens 6 Stellen genau berechnet werden kann ? (Benutzen Sie das vereinfachte Restglied)

Aufgabe 5:

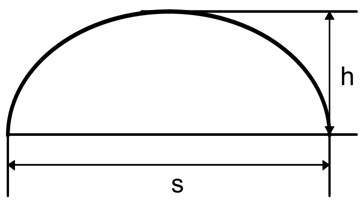
Wie groß muss man den Grad des TAYLOR-Polynoms der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ wählen, damit mit Hilfe dieses Polynoms $\ln 2$ auf mindestens 2 Stellen genau berechnet werden kann?

Aufgabe 6

Begründen Sie die Näherungsgleichung $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ für kleine x.

Für welche x ist diese Approximation ausreichend, falls 4-stellige Genauigkeit verlangt wird?

Aufgabe 7



Für eine Bogenbrücke ist die Länge des Spannbogens gegeben durch $l = s\left(\frac{s}{2h} + \frac{2h}{s}\right)\arctan\frac{2h}{s}$. Es sei s=150 m und h=15 m. Ist $\frac{2h}{s}$ klein, so kann die Funktion $f\left(\frac{2h}{s}\right) = \arctan\frac{2h}{s}$ durch das TAYLOR-Polynom 3.Grades ersetzt werden. Man berechne l mit $f\left(\frac{2h}{s}\right) = f(x) \approx T_3(x)$. Berechnen Sie den Fehler !

Aufgabe 8

Die Differenz zwischen der Bogenlänge b und zugehöriger Sehne s bei einem Kreis mit dem Radius r werde nach $d = f(\alpha) = r(\alpha - 2\sin\frac{\alpha}{2})$ berechnet, wobei α der Winkel ist, der zum Bogen b gehört. Approximieren Sie $f(\alpha)$ durch ein Polynom 3. Grades.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1

Da alle Ableitungen von f(x) = e^x übereinstimmen, ist
$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ und $f^{(n+1)}(\ \ x) = e^{\ \ x}$.

Nach Gleichung (1) der WB folgt dann die Taylorformel

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\vartheta\ x}}{(n+1)!} \ ; \ 0 < \vartheta \ \ < 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Mit Gleichung (3) der WB folgt : $f^{(n+1)}(0) = 1$ und damit $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$, also

gilt die Näherungsgleichung $e^x \approx \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$.

Aufgabe 3

$\sqrt[5]{0{,}8} = (0{,}8)^{1/5} = (1 - 0{,}2)^{0{,}2} \Rightarrow x = 0{,}2$
Aus der Taylorreihe für die Binomische Reihe (Formelsammlung) kann man mit
Hilfe der
Gleichung (1) WB herleiten :

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x) \ ; \ |x| < 1$$

$$\Rightarrow T_3(x) = (1-x)^{1/5} = (1 + (-x))^{1/5} = \binom{1/5}{0}(-x)^0 + \binom{1/5}{1}(-x)^1 + \binom{1/5}{2}(-x)^2 + \binom{1/5}{3}(-x)^3$$

$$\Rightarrow T_3(x) = 1 - \frac{1}{5}x + \frac{2}{25}x^2 - \frac{6}{125}x^3 \quad (1)$$

Zur Fehlerabschätzung benutzen wir die vereinfachte Form ((3) WB)mit n = 3:

$$|R_3(x)| \approx \left| \binom{1/5}{4} (-x)^4 \right| = \frac{504}{15000} x^4 \quad (2)$$

Also folgt insgesamt : (1) $\Rightarrow$ $\sqrt[5]{0{,}8} \approx T_3(0{,}2) \approx 0{,}963$

(2) $\Rightarrow$ $|R_3(0{,}2)| \approx 5{,}376 \ 10^{-5}$

Aufgabe 4

Für $f(x)=e^x$ gilt: $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$;

Das Restglied konvergiert für alle reellen x, also auch für $x=\frac{1}{2}$ ($\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$)

Mit Gleichung (3) der WB folgt:

$$|R_n(x)|\approx\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \Rightarrow \text{mit } x=\frac{1}{2} \text{ und } n \text{ variabel (der Grad des Polynoms ist gesucht)}$$

$$\left|R_n(\tfrac{1}{2})\right|\approx\left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\le\frac{1}{2}\,10^{-6}\ (\oplus)\left(\text{vgl. (4) der WB}: \left|\sqrt{e}-T_n(\tfrac{1}{2})\right|\le\frac{1}{2}10^{-6}\right)$$

Ungleichung ($\oplus$) muß mit Hilfe eines Taschenrechners (Probieren) gelöst werden:

mit $n=8 \Rightarrow \frac{1}{2^9\,9!}=5.382288...10^{-9}<.5\,10^{-6}$.

Aufgabe 5

Für f(x) = ln (1+x) entnimmt man aus einer Formelsammlung die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$; $x\in(-1;1]=I$. Daraus folgt für das Taylorpolynom $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$.

Wieder mit (3) WB folgt für das Restglied vereinfacht:

Ln 2 = ln (1+1) $\Rightarrow$ x=1 $\in I$.

$$|R_n(x=1)|\approx\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\right|_{x=1}=\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{2}10^{-2} \quad\Rightarrow\quad n+1\ge 2\ 10^2$$

$$\Rightarrow\quad n\ \ge\ 199 \quad \text{bzw. } n\approx 199$$

Aufgabe 6

Binomische Reihe: $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ mit $|x|\le 1$.

Dann folgt mit $\alpha=\frac{1}{2}$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k+R_n(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+....+\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n+R_n(x)$.

Daraus folgt zunächst die Näherungsgleichung $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}\approx 1+\frac{1}{2}x$ für $|x|\le 1$

Der ungefähre Fehler : $|R_2(x)| \approx \left|\frac{1}{8}x^2\right| \le \frac{1}{2}10^{-4}$ (4 – stellige Genauigkeit).

Löst man diese Ungleichung nach x auf, so erhält man ein ungefähres Intervall:

$\frac{1}{8}x^2 \le \frac{1}{2}10^{-4} \Rightarrow x^2 \le 4 10^{-4}$

$\Rightarrow |x| \le 2 10^{-2} = 0{,}02$, d.h., für alle x mit $-0{,}02 \le x \le +0{,}02$ wird ungefähr eine 4 – stellige Genauigkeit errreicht.

Aufgabe 7

Aus der Reihe für arctanx = $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ......$; $|x| \le 1$ folgt

arctanx = $x - \frac{x^3}{3} + R_3(x)$ mit $x = \frac{2h}{s} \le 1$,

(1) $\arctan \frac{2h}{s} = \frac{2h}{s} - \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{s}\right)^3 + R_3(\frac{2h}{s})$

Setzt man die rechte Seite von (1) in die Gleichung $l = s\left(\frac{s}{2h} + \frac{2h}{s}\right)\arctan\frac{2h}{s}$ ein, so

erhält man $l \approx s\left(1 + \frac{8h^2}{3s^2} - \frac{16h^4}{3s^4}\right) = 153{,}92$.

mit $R_3 \approx \frac{1}{5}\left(\frac{2h}{s}\right)^5 = 6.4 10^{-5}$

Aufgabe 8

Es ist sin x = x-$\frac{x^3}{3!} + R_3(x)$; $|x| \le \infty$ **.**

Mit $x = \frac{\alpha}{2}$ folgt : $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} + R_3(\frac{\alpha}{2})$.

Dann ist $d = r\left(\alpha - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) \approx r\left(\alpha - 2(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48})\right) = r\frac{\alpha^3}{24}$

6. Rekursionsformeln

Wissensbasis

Rekursionsformeln sind in der Mathematik - wie auch in der Informatik – im Zusammenhang mit rekursiven und iterativen Prozeduren wichtige und wirksame Werkzeuge.
Es soll eine Funktion $\varphi(n)$; $n \in \mathbf{N}$ rekursiv definiert werden, d.h. es soll eine Berechnungsvorschrift für $\varphi(n)$ gefunden werden, die – ausgehend von einem Anfangswert (Startwert) – Schritt für Schritt den gesuchten Funktionswert $\varphi(n)$ errechnet, dabei im k.ten Rechenschritt auf das Resultat des (k – 1).ten Rechenschritts zurückgreift. Die rekursive Behandlung und Lösung dieser oder ähnlicher Aufgaben ist ein spezielles algorithmisches Vorgehen.

Aufgabe : Es soll eine Rekursionsformel für $\varphi(n)$ entwickelt werden.

Anfang (Startwert) : $\varphi(0) = x_0$; $x_0 \in \mathbf{X}$ (beliebige Menge)

Rekursion (Rekursionsformel): $\varphi(n+1) = \Phi(n; \varphi(n))$; n=0,1,2,...

$\Phi(n; \varphi(n))$ ist ein Ausdruck der von n(nicht notwendig) und $\varphi(n)$ abhängt.

Beispiel :

Aufgabe : Es soll für $\varphi(n) = n!$ eine Rekursionsformel entwickelt werden, wobei $n! := 1.2.3.... .n$ und $0!=1$

Anfang : $\varphi(0) = 0! = 1$

Rekursion : $\varphi(n+1) = (n+1)! = \Phi(n; \varphi(n))$
$= \Phi(n;n!)$

Es besteht nun die Aufgabe, diesen Ausdruck Φ zu finden.

Da $(n+1)! = \underbrace{1.2.3....\,.n}_{}.(n+1)$
$= \quad n! \quad .(n+1)$

also ist $\varphi(n+1) = (n+1)!$
$= n!\,.\,(n+1)$
$= \Phi(n;n!)$; n=0,1,2,...

z.B. $\varphi(3)=3!$ ist direkt berechnet 1 mal 2 mal 3=6 ;
rekursiv : 0!=1

n=0 : $\varphi(1)=1! = (0+1)! = 0!\,.\,(0+1) = 1.1 = 1$
n=1 : $\varphi(2)=2! = (1+1)! = 1!\,.\,(1+1) = 1.2 = 2$
n=2 : $\varphi(3)=3! = (2+1)! = 2!\,.\,(2+1) = 2.3 = 6$

Aufgaben

Entwickeln Sie Rekursionsformeln für nachfolgende Ausdrücke $\varphi(n)$. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie einige Schritte berechnen!

Aufgabe 1

$$\varphi(n) = s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Aufgabe 2

$$\varphi(n) = a^n \quad (a>0)$$

Aufgabe 3

$$\varphi(n) = p_n = \prod_{i=0}^{n} a_i$$

Aufgabe 4

$\varphi(n)$ sei die n.-te Ableitung einer an der Stelle x0 n-mal differenzierbaren Funktion f(x).

Aufgabe 5

$$\varphi(n) = I_n = \int x^n e^x dx$$

Aufgabe 6

$$\varphi(k; n,p,q) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}; \quad \text{n,p,q fest mit } p+q=1;\ k=0,1,2,...$$

Aufgabe 7

$$\varphi(n,\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (\lambda>0 \text{ fest})$$

Aufgabe 8

$$\varphi(n) = \frac{\alpha^n}{n!} \quad (\alpha>0)$$

Berechnen Sie $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n)$, wobei vorausgesetzt werde, dass der Grenzwert existiert.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1

$$\varphi(n) = s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Dann ist der Anfangswert $\varphi(0) = s_0 = \sum_{i=0}^{0} a_i = a_0$.

$\varphi(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i$

$= a_{n+1} + \varphi(n)$.

Daraus folgt die Rekursion :

$\varphi(0) = a_0$

$\varphi(n+1) = a_{n+1} + \varphi(n)$; n=0,1,2,..

Aufgrund der Tatsache, dass Null das neutrale Element der Addition ist, könnte man auch mit $\varphi(0)=0$ beginnen.

Aufgabe 2

$\varphi(n) = a^n \Rightarrow \varphi(n) = a^0 = 1$

$\varphi(n+1) = a^{n+1} = \underbrace{a^n}_{\varphi(n)} \; a$

$= a.\ \varphi(n)$,

also $\varphi(0)=1$

$\varphi(n+1) = a.\ \varphi(n)$; n=0,1,2,...

Aufgabe 3

$\varphi(n) = p_n = \prod_{i=0}^{n} a_i$

$\Rightarrow \varphi(0) = p_0 = a_0$

$\varphi(n+1) = p_{n+1} = \prod_{i=0}^{n+1} a_i$

$= a_{n+1}.\ \prod_{i=0}^{n} a_i$

$= a_{n+1}.\ \varphi(n)$

Da die Eins das neutrale Element der Multiplikation ist, währe auch $\varphi(0)=1$ ein zulässiges Anfangswert.

Aufgabe 4

In der Differentialrechnung wird die Null.te Ableitung $f^{(0)}(x_0)$ dem Funktionswert $f(x_0)$ gleichgesetzt, d.h. $\varphi(0)= f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ und $\varphi(n) = f^{(n)}(x_{0)}$, mithin

$\varphi\ (n+1) = f^{n+1}(x_0)$

$= ((f^{(n)})'(x_0)$

$=(\varphi(n))'$,

Aufgabe 5

$\varphi(0) = I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x$,

$\varphi(n+1) = I_{n+1} = \int x^{n+1} e^x dx$.

Mit Hilfe der partiellen Iteration

$$\int u v dv = uv - \int v du$$

bekommt man mit den Substitutionen $u = x^{n+1}$ und $dv = e^x dx$, woraus $du = (n+1)x^n$ bzw. $v = e^x$ folgt, $\int x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x - \int e^x \cdot (n+1) \cdot x^n dx$

$$= x^{n+1} e^x - (n+1) \,.\, \underbrace{\int x^n e^x dx}_{\varphi(n)=I_n} .$$

Das ergibt die Rekursion :

$$\varphi(0) = e^x = I_0$$
$$\varphi(n+1) = I_{n+1} = x^{n+1} e^x - (n+1)I_n$$

z.B. $I_2 = \int x^2 e^x dx$

$n=0 : \varphi(1) = I_1 = x^1 e^x - 1I_0 = xe^x - e^x = e^x(x-1)$

$n=1 : \varphi(2) = I_2 = x^2 e^x - 2I_1$

$= x^2 e^x - 2e^x (x-1)$

$= e^x (x^2 - 2x + 2)$

Beachten Sie : man kann das Integral lösen, ohne zu integrieren!

Aufgabe 6

$$\varphi(0; n,p,q) = \underbrace{\binom{n}{0}} p^0 q^{n-0}$$

$= 1 \,.\, 1.\, qn = qn$

$$\varphi(k+1; n,p,q) = \binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-(k+1)}$$

aus der Definition des Binomialkoeffizienten folgt die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}.$$

Also ergibt sich

$$\varphi(k+1; n,p,q) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot p \cdot q^{n-k} \cdot q^{-1}$$

$$= \frac{n-k}{k+1} \cdot p \cdot q^{-1} \cdot \underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

$$= \frac{n-k}{k+1} \;.\; \frac{p}{q} \;.\; \varphi(k) \text{ ; } k=0,1,2,...$$

Aufgabe 7

$$\varphi(0;\lambda) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$\varphi(n+1;\lambda) = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n \cdot \lambda}{n!(n+1)} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda}{n+1} \cdot \varphi(n;\lambda) \text{ ; } n=0,1,2,...$$

Aufgabe 8

$$\varphi(0) = \frac{\alpha^0}{0!} = 1$$

$$\varphi(n+1) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\alpha^n \cdot \alpha}{n!(n+1)}$$

$$= \frac{\alpha}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{\alpha^n}{n!}}$$

$$= \frac{\alpha}{n+1} \cdot \varphi(n) \text{ ; } n=0,1,2,...$$

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(n+1) = \lim \left(\frac{\alpha}{n+1} \cdot \varphi(n)\right)$$

$$= \underbrace{\lim \frac{\alpha}{n+1}} \;.\; \underbrace{\lim \varphi(n)}$$

$$= \quad 0 \quad . \quad g \quad \text{(ex. nach Voraussetzung)}$$

$$= 0$$

Da $\varphi(n+1)$ dieselbe Wertfolge durchläuft wie $\varphi(n)$ (das erste Glied ausgenommen) hat $\varphi(n+1)$ denselben Grenzwert wie $\varphi(n)$.

7. Parameterdarstellung ebener Kurven

Wissensbasis

Es liege ein rechtwinkliges x, y – Koordinatensystem S vor. Sind die Werte der beiden Veränderlichen x und y durch eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad F(x, y) = 0$$

verknüpft, so ist die Menge K aller Punkte P(x, y), deren Koordinaten x, y (1) erfüllen, eine ebene Kurve K.

Entspricht jedem x (in einem bestimmten Bereich) genau ein y, so wird durch (1) eine Funktion y = f(x) implizit definiert; d.h., die Gleichung

$$F(x, f(x)) = 0$$

ist identisch in x.

Für viele praktische Fragen – auch in der Computergraphik – ist es sinnvoll, die Koordinaten x, y eines Punktes $P(x, y) \in K$ über zwei auf dem gleichen Intervall **I** definierte Funktionen

$$(2) \qquad x = x(t) \text{ und } y = y(t) \, ; \, t \in \mathbf{I}$$

zu berechnen. Die Gleichungen (2) nennt man Parameterdarstellung von K; t den Parameter.

<u>Beispiel 1</u>

Sei (3) $x = x(t) = 2\,t$ und $y = \frac{1}{2}\,t$; $t \in \mathbf{R}$.

Um herauszubekommen, um welche Kurve K es sich handelt, ist der Parameter t aus beiden Gleichungen (3) zu entfernen, um so die Kurvengleichung F(x, y) = 0 bzw., falls eine Funktion mit der Parameterdarstellung definiert wurde, $y = f(x)$; $x \in D_f$ zu erhalten .

Aus x = 2t folgt $t = \frac{1}{2}x$, eingesetzt in $y = \frac{1}{2} \cdot t$ ergibt: $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{4} \cdot x$. (Funktion).

Zur Bestimmung des Definitionsbereichs dient $x = 2 \cdot t$: da $t \in \mathbf{R}$ folgt $x \in \mathbf{R}$; also

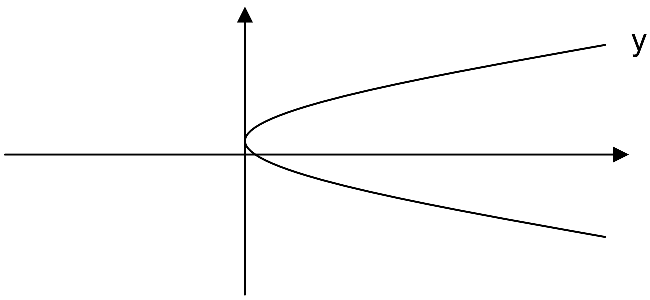
$y = \frac{1}{4} \cdot x$; $x \in \mathbf{R}$ (eine Gerade) bzw. $F(x, y) = y - \frac{1}{4} \cdot x = 0$.

<u>Beispiel 2</u>

Sei $x = t^2$ und $y = t$; $t \in \mathbf{R}$.

$y = t \quad \Rightarrow \quad y^2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x$ und $x \geq 0$.

K ist eine Parabel, wobei die x-Achse die Symmetrieachse ist.



Durch die Parameterdarstellung wird damit keine Funktion definiert.

Die Eindeutigkeit ließe sich erreichen, wenn man etwa den Parameterbereich $-\infty < t < +\infty$ auf $t \geq 0$ einschränkt, da dann mit (3) $y = t \geq 0$ und somit aus $y^2 = x$ die Funktionsgleichung $y = +\sqrt{x}$; $x \geq 0$ folgt (obere Ast der Parabel).

Aufgaben

Gegeben seien die Parameterdarstellungen $x = x(t)$ und $y = y(t)$; $t \in \mathbf{R}$ einer Kurve K. Bestimmen Sie die Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ bzw. $y = f(x)$. Skizzieren Sie die Bilder von K.

Aufgabe 1 : $x = t^2 - 2 \cdot t + 1$; $y = t^2 - 2 \cdot t + 1$

Aufgabe 2 : $x = 1 - 5 \cdot t^2$; $y = 3 + t^2$

Aufgabe 3 : $x = \cos 2 \cdot t$; $y = \sin^2 t$

Aufgabe 4 : $x = \dfrac{2 - t^2}{1 + t^2}$; $y = \dfrac{4 \cdot t}{1 + t^2}$

Aufgabe 5 : $x = \cos t$; $y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot t$ (keine Skizze)

Aufgabe 6 : $x = x_0 \cdot \cos t$; $y = y_0 \cdot \sin t$; x_0, $y_0 > 0$ fest.

Kommentierte Lösungen

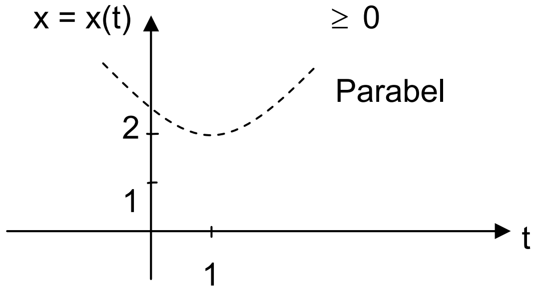
Aufgabe 1

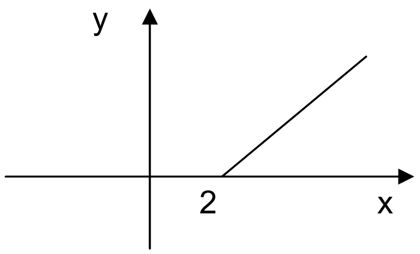
(1) $x = t^2 - 2 \cdot t + 3$
$: t \in R$
(2) $y = t^2 - 2 \cdot t + 1$

$$(1) \wedge (2) \quad \Rightarrow \quad x - 3 = t^2 - t \wedge y - 1 = t^2 - 2 \cdot t$$
$$\Rightarrow \quad x - 3 = y - 1$$
$$\Rightarrow \quad y = x - 2 \text{ (Halbgrade)}$$

Zur Bestimmung von D_f (Definitionsbereich) betrachten wir (1).
Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung folgt:

$$x = t^2 - 2 \cdot t + 3 = \underbrace{(t-1)^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2$$



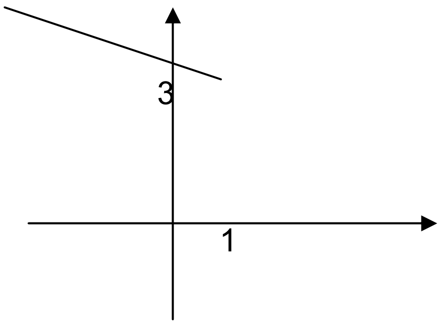


Aufgabe 2

(1) $x = 1 - 5 \cdot t^2$
$: t \in R$
(2) $y = 3 + t^2$

(4) $\Rightarrow$ y – 3 = t^2
$\Rightarrow$ mit (3) x = 1 – 5 $\cdot$ (y – 3)
$\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{5}\cdot x + \frac{16}{5}$

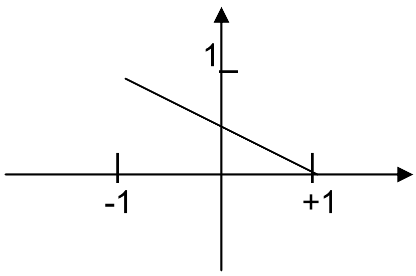
Der Definitionsbereich folgt aus (3) :
$5 \cdot t^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x = 1 - 5 \cdot t^2 \leq 1$



Aufgabe 3

(3) x = cos 2t
: t$\in$R
(4) y = sin t
Es ist cos 2t = 1 – 2sin² t
Dann folgt mit (6) x = cos 2t = 1 – 2y
$\Rightarrow$ x – 1 = - 2y
$\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$

Da $-1 \leq \cos 2t \leq +1 \Rightarrow -1 \leq x \leq +1$, also eine Strecke, die von $P_0(-1; +1)$ nach $P_1(+1; 0)$ führt.



Aufgabe 4

(5) $x = \frac{2-2\cdot t^2}{1+t^2}$
: t$\in$R
(6) $y = \frac{4\cdot t}{1+t^2}$
(7) $\Rightarrow$ $x^2 = 4 \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1-2\cdot t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$

(8) $\Rightarrow y^2 = 16 \cdot \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$

$x^2 + y^2 = 4 \cdot \dfrac{1-2\cdot t^2+t^4}{(1+t^2)^2} + 16 \cdot \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{4-8\cdot t^2+4\cdot t^4+16\cdot t^2}{(1+t^2)^2}$

$$x^2 + y^2 = \frac{4+8\cdot t^2+4\cdot t^4}{(1+t^2)^2}$$
$$= \frac{4\cdot(1+2\cdot t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}$$
$$= \frac{4\cdot(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$
$$= 4$$

Wenden wir uns dem Wertebereich der Funktion x(t) zu, um die Kurve vollständig zu bestimmen :

$x = \dfrac{2-2\cdot t^2}{1+t^2} = \dfrac{2}{1+t^2} - \dfrac{2\cdot t^2}{1+t^2} \leq \dfrac{2}{1+t^2} \leq 2$,da $1 + t^2 \geq 1$;

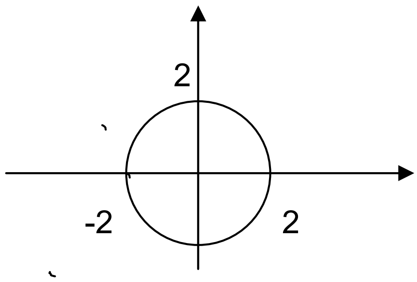
$x > -2$, da $1 - t^2 > -1 - t^2$

$\Rightarrow 1 - t^2 > -(1 + t)$

$\Rightarrow \dfrac{1-t^2}{1+t^2} > -1$

$\Rightarrow \dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2} > -2$

K ist also ein Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten (0; 0) und den Radius r=2, ohne den Punkt P(-2; 0).



Aufgabe 5

(7) $x = \cos t$

$: t \in R$

(10) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot t$

Mit $\sin 2\cdot t = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$ folgt mit (9)

$y = \sin t \cdot x$

$y^2 = \sin^2 t \cdot x^2$; $\sin t = 1 - \cos t = 1 - x$

$\Rightarrow y^2 = (1 - x^2) \cdot x^2$

$\Rightarrow y^2 - (1 - x^2) \cdot x^2 = 0$

Aus (9) erhält man für x den Bereich $-1 \leq x \leq +1$ (Wertebereich des cos t) und aus (10) mit $|\sin 2t| \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq +\frac{1}{2}$.

Aufgabe 6

(11) $x = x_0 \cdot \cos t$
(12) $y = y_0 \cdot \sin t$

(11) $\wedge$ (12) $\Rightarrow \frac{x}{x_0} = \cos^2 t \quad \wedge \quad \frac{y}{y_0} = \sin t$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x_0^2} = \cos^2 t \wedge \frac{y^2}{y_0^2} = \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{(Ellipse)}$$

(11) $\Rightarrow |x| = |x_0 \cdot \cos t| = |x_0| \cdot |\cos t| \leq |x_0| = x_0$, da $x_0 > 0$.
$\Rightarrow |x| \leq x_0 \Leftrightarrow -x_0 \leq x < x_0$
analog folgt $-y_0 \leq y \leq +y_0$.

8. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wissensbasis

Definition 1
Die Menge der möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt Ergebnismenge Ω. Ihre Elemente w_i heißen Elementarereignisse.

Definition 2
Jede Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt Ereignis, wobei die leere Menge $\varnothing$ das unmögliche Ereignis und Ω das sichere Ereignis ist.

Da Ereignisse Menge sind, lassen sich u. a. die Operationen Komplement, Vereinigung und Durchschnitt anwenden. Die entstehende Mengen sind wieder Ereignisse.

Definition 3
Ein Tripel (Ω, E, P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum, falls

a) Ω eine nichtleere Menge,
b) E eine Ereignismenge (Algebra) über Ω ,
c) P eine Abbildung ist, welche jedem Ereignis $A_i \in E$ reelle Zahlen $P(A_i)$ zuordnet, für die folgende Axiome gelten :

A1 $P(A_i) \geq 0 \quad \forall A_i \in E$

A2 $P(\Omega) = 1$

A3 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$; A_i paarweise disjunkt

P heißt Wahrscheinlichkeitsmaß über Ω.

Aus den Axiomen A1 bis A3 resultieren folgende Rechenregeln :

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \varnothing$
3. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ seien paarweise unvereinbar, d.h. $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, dann gilt :
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$
4. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$; $A, \bar{A}$ komplementäre Ereignisse.
5. $0 \leq P(A) \leq 1$

Definition 4
Sei A und B zwei Ereignisse, die zu einem Versuch gehören, d.h. $A,B \in E$ und sei $P(A) \neq 0$. $P(B/A)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A (Kurz : bedingte Wahrscheinlichkeit) und es ist $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Ist $P(B \neq 0)$, so gilt $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Daraus folgt die Regel

6. $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$
7. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ paarweise unvereinbar mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

   Dann gilt $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$
8. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ paarweise unvereinbar mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ und $P(B)>0$. Dann gilt :

   $$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B/A_j) \cdot P(A_j)} \qquad (i=1,...,k)$$

Definition 5
A, B heißen unabhängig, falls P(A) = P(A/B) bzw. P(B) = P(B/A).

9. Wenn A, B unabhängig, so $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
10. Sei $|\Omega|=n$, $|A|=k$ und alle Elementarereignisse $w_i \in \Omega$ gleichwahrscheinlich. Dann gilt :

    $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} = \frac{\text{Anzahlder für Agünstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} \quad \text{(Regel von Laplace)}$$

    Für Zufallsexperimente, die keine Laplace-Experimente (keine Gleichwahrscheinlichkeit) sind, wird das Maß P durch die relative Häufigkeit $h_n(A)$ geschätzt :

    $P(A) \approx h_n(A)$ für großen n. (statistische Definition der Wahrscheinlichkeit)
11. Für beliebige Ereignisse $A,B \in E$ gilt :
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Aufgaben

Aufgabe 1
Sei $\Omega=\{0; 1\}$ und $[\Omega, 2^\Omega, P]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei 2^Ω für Potenzmenge von Ω steht und stets eine Ereignisalgebra (Ereignismenge E) ist. Weiter sei $P(\{0\})=p$.
a) Wie lautet $P(\{1\})$?
b) Für welches p handelt es um den Wahrscheinlichkeitsraum des Versuchs „Münzwurf"?

Aufgabe 2

Eine Urne enthalte drei Kugeln, die jeweils mit den Ziffern 1; 2 und 3 gekennzeichnet sind. Es werde zufällig eine Kugel entnommen.

a) Geben Sie Ω und die Ereignisalgebra 2^{Ω} an.
b) Interpretieren Sie das Ereignis A={1; 2}.
c) Berechnen Sie P(A).

Aufgabe 3

Ordnet man den Ergebnissen einer endlichen Menge Ω die aus langen Versuchserien erhaltenen relativen Häufigkeiten $h_n(\{w_i\})$ (stat Def. d. W.) als Wahrscheinlichkeiten $P(\{w_i\})$ zu, so gilt für alle Ereignisse $A \in E$: $P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\})$.

Zeigen Sie das!

Aufgabe 4

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Rechenregeln :

a) $P(\emptyset)=0$
b) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
c) $0 \leq P(A) \leq 1$
d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

Aufgabe 5

Es gelte P(A)=0,4 ; P(B)=0,7 und P(A\B)=0,2. (A\B ist die mengentheoretische Differenz). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :

a) Von den beiden Ereignissen A und B tritt keines ein.
b) Von den beiden Ereignissen A und B tritt höchstens eines ein.
c) Von den beiden Ereignissen A und B tritt mindestens eines ein.

Aufgabe 6

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel (1 Wurf)

a) eine 3
b) keine 3
c) eine Zahl kleiner 8
d) eine 9
e) eine 2 oder eine 3
f) eine gerade Zahl oder eine 3
g) eine gerade Zahl oder eine 2

zu würfeln.

Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich 2 schwarze, 10 weiße, 5 rote und 12 grüne Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim einmaligen Ziehen eine schwarze oder eine weiße Kugel erhält?

Aufgabe 8

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf mit zwei Würfeln eine 4 (Summe oder Augenzahlen) zu erhalten?

Aufgabe 10

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln bei einem Wurf wenigstens eine 6 zu würfeln?

Aufgabe 11

In einer Fabrik arbeiten unabhängig voneinander drei automatische Taktstraßen. Statistische Untersuchengen haben folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten je Schicht ergeben:

Taktstraße 1 : 0,08
Taktstraße 2 : 0,13
Taktstraße 3 : 0,19

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Schicht

a) keine Taktstraße ausfällt
b) alle Taktstraßen ausfallen
c) wenigstens eine Taktstraße arbeitet?

Aufgabe 12

In einer Urne befinden sich 10 weiße, 15 blaue und 25 rote Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) 2 gleichfarbige Kugeln
b) 2 verschiedenfarbige Kugeln

zu ziehen, wenn die zuerst gezogene Kugel wider in die Urne zurückgelegt wird und

c) 2 bunte (nicht weiß) Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die zuerst gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird?

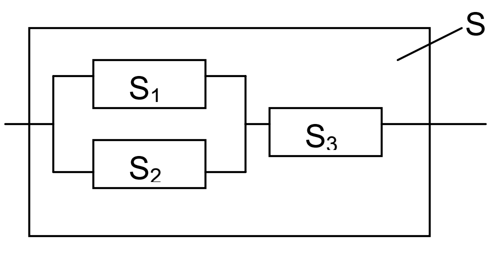
Aufgabe 13

Die Verlässlichkeit einer MRT-Untersuchung bei einem Knieschaden sei 0,9. Die Wahrscheinlichkeit ein gesundes Knie als solches zu erkennen 0,99. Aus einer Stichprobe mit 0,1% kniegeschädigten Personen sei eine Person mittels MRT untersucht und als kniegeschädigter eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person einen Knieschaden hat?

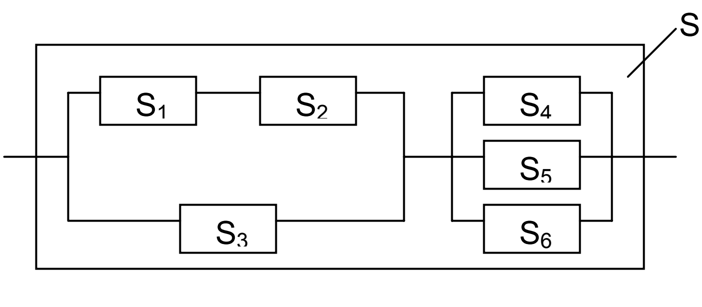
Aufgabe 14

Berechnen Sie die Zuverlässigkeit folgender System S; p_i sei die Zuverlässigkeit der Teilsystems S_i. (Zuverlässigkeit eines Systems ist die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines festen Zeitintervalls nicht auszufallen)

a)



b)



Hinweis : Benutzen Sie die üblichen Regeln für Reihen- und Parallelschaltung.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1

a) $\Omega = \{0;1\} = \{0\} \cup \{1\}$.
   Aus A2 folgt, dass $P(\Omega=\{0;1\})=1$ und mit Regel 3:
   $P(\Omega) = P(\{0\} \cup \{1\}) = P(\{0\}) + P(\{1\}) = 1$
   $\Rightarrow p + P(\{1\}) = 1$
   $\Rightarrow \quad P(\{1\}) = 1-p$

b) Ist Ω die Ereignismenge eines Münzwurfs, so sind die Ereignisse {0} und {1} gleichwahrscheinlich, also mit Regel 10 (Laplace) :
   $$P(\{1\}) = \frac{|\{1\}|}{|\{0;1\}|} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{2} \quad \text{(vgl. a))}$$

Aufgabe 2

a) Wenn zufällig eine Kugel entnommen wird, so sind die drei Ziffern 1; 2 und 3 mögliche Ergebnisse, also $\Omega = \{1,2,3\}$.
   2^Ω ist die Potenzmenge von Ω, d.h. alle Teilmengen von Ω - auch die leere Menge $\emptyset$ - werden zum Mengensystem 2^Ω zusammengefasst :
   $2^\Omega = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\Omega\}$

b) $A = \{1;2\} = \{1\} \cup \{2\}$ („1 oder 2“)
   A ist das Ereignis „Ziehen der Kugel 1 oder der Kugel 2“.

c) Da alle 3 Ziffern die gleiche Chance haben, gezogen zu werden, folgt mit Regel 10 :
   $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3

Sei $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir das Ereignis (Teilmenge)

A={w_1,...,w_k} ; k≤n. Es ist A = {w_1}∪{w_2}∪...∪{w_k} = $\bigcup_{i=1}^{k}\{w_i\}$

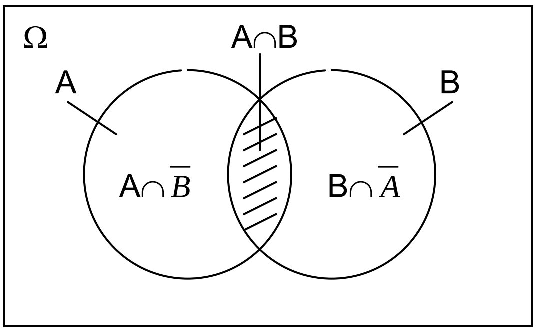
Mit Regel 3 folgt dann :

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{w_i\}\right)=\sum_{i=1}^{k}P(\{w_i\}) \quad (*)$$

$$= \sum_{w_i\in A}P(\{w_i\}) \text{ (nur eine andere Schreibweise für (*))}$$

Aufgabe 4

a) Es ist A∪∅=A. Da A und ∅ unvereinbar (A∩∅=∅) folgt mit Regel 2 :
   P(A∪∅) = P(A) ⇒ P(A) + P(∅) = P(A) ⇒ P(∅) = 0
b) Es ist A∪$\overline{A}$=Ω und A∩$\overline{A}$=∅ (unvereinbar).
   P(A∪$\overline{A}$) = P(Ω) ⇒ P(A) + P($\overline{A}$) = 1
c) Nach A1 ist P(A) ≥ 0 und P($\overline{A}$) ≥ 0 ; d.h.
   P(A) = 1 – P($\overline{A}$) ≤ 1 ⇒ 0 ≤ P(A) ≤ 1.
d)



(1) A∪B = (A∩$\overline{B}$) ∪ (A∩B) ∪ (B∩$\overline{A}$)
(2) A = (A∩$\overline{B}$) ∪ (A∩B)
(3) B = (B∩$\overline{A}$) ∪ (A∩B)

Alle Ereignisse der rechten Seiten der Gleichungen (1)-(3) sind paarweise disjunkt (unvereinbar) ; z. B. in (1) : (A∩$\overline{B}$) mit (B∩$\overline{A}$), da

$$(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A}) = \underbrace{(A\cap\overline{A})}\cap\underbrace{(B\cap\overline{B})}$$
$$= \emptyset \cap \emptyset$$
$$= \emptyset .$$

Dann ist

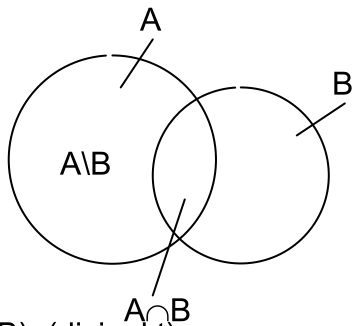
(4) P(A∪B) = P(A∩$\overline{B}$) + P(A∪B) + P(B∩$\overline{A}$)
(5) P(A) = P(A∩$\overline{B}$) + P(A∪B)
(6) P(B) = P(B∩$\overline{A}$) + P(A∪B)

Subtrahiert man von Gleichung (4) die Gleichungen (5) und (6), so ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 5

a) Die Aussage „Von den beiden Ereignissen A und B tritt keines ein“ ist äquivalent zur Aussage „A tritt nicht ein und B tritt nicht ein“ :

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ (Morgan'sche Formel).
P($\overline{A} \cap \overline{B}$) = P($\overline{A \cup B}$) = 1 – P(A∪B) (Regel 4) ;
P(A∪B) = P(A) + P(B) - P (A∩B) (Regel 11).
P(A), P(B) sind gegeben, P(A∩B) ist noch zu berechnen. Dazu benutzen wir die Differenz A\B.



A = (A\B) ∪ (A∩B) (disjunkt)
P(A) = P(A\B) + P(A∩B)
⇒ P(A∩B) = P(A) - P(A\B) = 0,4 – 0,2 = 0,2
⇒ P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
= 0,4 + 0,7 – 0,2
= 0,9
⇒ P($\overline{A \cup B}$) = 1 – 0,9 = 0,1

b) Zur angegebener Aussage in der Aufgabe ist äquivalent "A und B treten nicht zusammen ein", d.h. auch $\overline{A \cap B}$ = $\overline{A} \cup \overline{B}$ (Morgan'sche Formel)
= 1 – 0,2
= 0,8

c) Diese Aussage ist äquivalent mit A∪B ; d.h. P(A∪B) = 0,9 (vgl. 5 a))

Aufgabe 6
Da der Würfelversuch ein Laplace'sches Experiment ist – alle Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich – kann man alle Teilaufgaben mit Regel 10 lösen.

a) P(„eine 3") = $\frac{1}{6}$: Ω = {1,2,...,6} mögliche Ereignisse
A = {3} günstiges Ereignis

b) P(„keine 3") = $\frac{5}{6}$ oder P(„keine 3") = 1 – P(„keine 3") (Regel 4)

c) P(„Zahl kleiner 8") = $\frac{6}{6}$ = 1 (sicheres Ereignis)

d) P(„eine 9") = $\frac{0}{6}$ = 0 (unmögliche Ereignis)

e) P(„2 oder 3") = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$

f) P(„gerade Zahl oder 3") = $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$

g) P(„gerade Zahl oder 2") = $\frac{3}{6}$ = $\frac{1}{2}$

Aufgabe 7
Denkt man sich alle Kugeln durchnumeriert, so erhält man die Ziffern 1 – 29, mithin ist $\Omega = \{1,2,...,29\}$ und alle Ziffern sind gleichwahrscheinlich. Nicht so, wenn man die Farben zugrunde legt und wählt Ω_1 = {schwarz, weiß, rot, grün}.
Mit Ω und der Regel von Laplace erhält man :
P(schwarz $\vee$ weiß) = $\frac{12}{29}$

Aufgabe 8
Z=Zahl ; K=Kopf
$\Omega = \{(z,z);(z,k);(k,z);(k,k)\}$ $\Rightarrow$ mit Laplace $P(z,z) = \frac{1}{4}$
oder A = Zahl beim 1. Wurf
B = Zahl beim 2. Wurf
$\Rightarrow$ P(„beide Male Zahl") = $P(A \cap B)$
$= P(A) \cdot P(B)$ (Regel 9)
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{4}$

Aufgabe 9
Summe = 4 erhält man durch die Zahlenpaare (1;3) (3;1) (2;2) günstige Ereignisse.
Ω ist die Menge aller möglichen Paare, also 6*6 = 36 Zahlenpaare. Daraus folgt
P(Summe=4) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Aufgabe 10
Das Ereignis „wenigstens eine 6" bedeutet die Zahlenpaare (1;6) (2;6) (3;6) (4;6) (5;6) (6;6) (6;1) (6;2) (6;3) (6;4) (6;5); d.h. P(„wenigstens eine 6") = $\frac{11}{36}$ oder
A = „Würfel 1 zeigt eine 6"
B = „Würfel 2 zeigt eine 6"
P(„wenigstens eine 6") = $P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Regel 11)
Regel 3 zieht nicht, da die Ereignisse A, B durchaus miteinander vereinbar sind, d.h. beide Würfel können eine 6 aufweisen, aber A, B sind unabhängig, was heißt, die Ereignisse beeinflussen nicht einander, demzufolge ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, somit
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$
$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$
$= \frac{11}{36}$

Aufgabe 11
Wir definieren folgende Ereignisse :
A = „Taktstraße 1 fällt aus"

B = „Taktstraße 2 fällt aus“
C = „Taktstraße 3 fällt aus“
Ausfallwahrscheinlichkeiten :
P(A)=0,08 ; P(B)=0,13; P(C)=0,19

a) P(“keine Taktstraße fällt aus“”) = P($\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$)
   Da die Taktstraßen unabhängig voneinander arbeiten, gilt :
   $$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) \quad \text{(Regel 9)}$$
   $$= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))$$
   $$= (1 - 0{,}08)(1 - 0{,}13)(1 - 0{,}19)$$
   $$\approx 0{,}648$$
b) P(„alle Taktstraßen fallen aus“) = P(A∩B∩C)
   $$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
   $$\approx 0{,}0012$$
c) „wenigstens eine Taktstraße arbeitet “ ist die Negation von „alle Taktstraßen fallen aus“ : P(„wenigstens eine Taktstraße arbeitet “) = 1 – 0,0012 = 0,9988

Aufgabe 12

a) „2 gleichfarbige“ = (w,w)∪(r,r)∪(b,b)
   Da die Ereignisse der rechten Seite der Gleichung unvereinbar sind, gilt mit Regel 3 : P(„2 gleichfarbige“) = P(w,w) + P(r,r) + P(b,b).
   Die Ereignisse w = „weiß im 1. Zug“ bzw. r bzw. b sind unabhängig, da die Kugel wieder zurückgelegt wird.
   Damit ist $P(w,w) = P(w) \cdot P(w) = (P(w))^2$;
   analog $P(r,r) = (P(r))^2$; $P(b,b) = (P(b))^2$.
   $$P(\text{„2 gleichfarbige“}) = (P(w))^2 + (P(r))^2 + (P(b))^2$$
   $$= \left(\frac{10}{50}\right)^2 + \left(\frac{25}{50}\right)^2 + \left(\frac{15}{50}\right)^2$$
   $$= 0{,}38$$
b) „2 verschiedenfarbige“ ist die Negation von „2 gleichfarbige“ ⇒ 1– 0,38 = 0,62
c) Da die zuerst gezogene Kugel nicht mehr zurückgelegt wird, geht die Unabhängigkeit verloren.
   Sei A = „bunt im 1. Zug“
   B = „bunt im 2. Zug“
   $$P(\text{„2 bunte Kugeln“}) = P(A \cap B)$$
   $$= P(A) \cdot P(B/A) \quad \text{(Regel 6)}$$
   $$= \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49}$$
   $$\approx 0{,}637$$

Aufgabe 13

Sei B das Ereignis eines positiven MRT-Befundes,
A das Ereignis, dass die untersuchte Person einen Knieschaden hat und
$\overline{A}$ das Ereignis, dass die untersuchte Person keinen Knieschaden hat.
Aus der Aufgabenstellung folgt dann :
$P(B/A) = 0{,}9$; $P(B/\overline{A}) = 0{,}01$; $P(A) = 0{,}001$; $P(\overline{A}) = 0{,}999$
Gesucht ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A/B). Hier lässt sich Regel 8 anwenden.$A_1 = A$; $A_2 = \overline{A}$ und P(B)>0.

i=1 : $P(A_1=A/B) = \dfrac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B/A)\cdot P(A)+P(B/\overline{A})\cdot P(\overline{A})}$

$= \dfrac{0{,}9\cdot 0{,}001}{0{,}9\cdot 0{,}001+0{,}01\cdot 0{,}999}$

$= 0{,}0826$

d.h. , von den durch MRT eingestuften kniegeschädigten Personen, haben etwa nur 8% wirklich einen Knieschaden, obwohl die MRT-Untersuchung die Verlässlichkeit 0,9 hat, d.h. 0,9 ist die Wahrscheinlichkeit, einen kniegeschädigten Patienten als solchen zu identifizieren.

Aufgabe 14

a) S = „Das Gesamtsystem funktioniert"
   S_i = „Das i.te Teilsystem funktioniert"
   $\Rightarrow S = (S_1 \cup S_2) \cap S_3$ (S_i unabhängig)
   $\Rightarrow P(S) = P((S_1 \cup S_2) \cap S_3)$
   $= P((S_1 \cup S_2) \cdot P(S_3))$ (Regel 9)
   $= [P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)] \cdot P(S_3)$ (Regel 11)
   $= [P(S_1) + P(S_2) - P(S_1) \cdot P(S_2)] \cdot P(S_3)$
   $= (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) \cdot p_3$

b) Mit den Festlegungen in a) folgt :
   $S = [(S_1 \cap S_2) \cup S_3] \cap (S_4 \cup S_5 \cup S_6)$
   $P(S) = P[(S_1 \cap S_2) \cup S_3] \cdot P(S_4 \cup S_5 \cup S_6)$
   $= [P(S_1 \cap S_2) + P(S_3) - P(S_4 \cup S_5 \cup S_6)] \cdot [P(S_4 \cup S_5) + P(S_6) - P((S_4 \cup S_5) \cap S_6)]$
   $= [P(S_1) \cdot P(S_2) + P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3)] \cdot [P(S_4) + P(S_5) - P(S_4 \cap S_5) +$
   $+ P(S_6) - P(S_4 \cup S_5)] \cdot P(S_6)$
   $= [p_1 \cdot p_2 + p_3 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3] \cdot [p_4 + p_5 - p_4 \cdot p_5 + p_6 - p_4 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6 + p_4 \cdot p_5 \cdot p_6]$
   $= (p_1 \cdot p_2 + p_3 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \cdot [1 - (1 - p_4)(1 - p_5)(1 - p_6)]$

9. Einblick in die mathematischen Methoden der Computergrafik in der Ebene

Wissensbasis

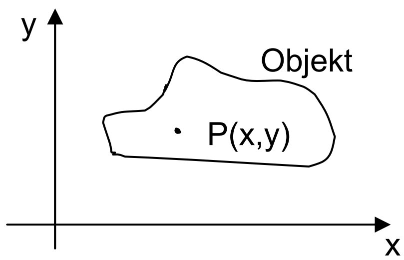
Zur Erzeugung und Manipulation von Objekten am Bildschirm sind die zweidimensionalen Transformationen: Translation, Drehung, Skalierung und Spiegelung grundlegend.

Es gibt zwei Standpunkte bei der Beschreibung von Objektbewegungen :

a) Das Koordinatensystem bleibt fest und das Objekt bewegt sich (geometrische Transformation).
b) Das Objekt bleibt fest und das Koordinatensystem wird bewegt (Koordinatentransformation).

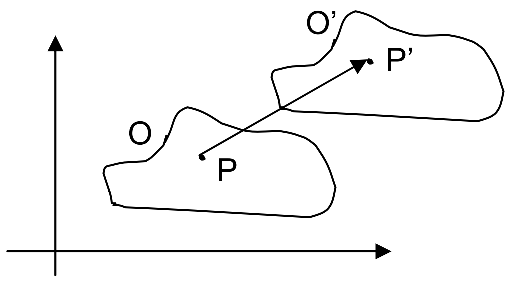
Es werden die Formeln für den Standpunkt a) angegeben, da aus mathematischer Sicht der Übergang zu b) unproblematisch ist.
Als mathematisches Handwerkzeug dient der Matrizenkalkül, da insbesondere Transformationsverknüpfungen in sehr einfacher Weise dargestellt werden können.

Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Ein Punkt P habe die Koordinaten (x,y). Ein Objekt O ist die Menge aller Punkte P(x,y).



Translation

Bei der Translation wird ein Objekt O in eine bestimmte Richtung und um einen bestimmten Betrag (Distanz) verschoben. Es entsteht das Objekt O'.



Die Verschiebung wird durch den Vektor v=$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ definiert. Wendet man v auf jeden Punkt P∈O an, so erhält man jeden Punkt P'(x',y')∈O';
kurz : P' = T_v(P) ; T_v Transformationsoperator bezüglich v
genauer : P' = P+v = T_v(P) (Vektorgleichung)

(1) ⇔ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

(2) ⇔ $x' = x+v_1$
$y' = y+v_2$

Die Vektorgleichung (1) lässt sich durch einen Kunstgriff an (2) in eine Matrizengleichung überführen.

$$\begin{array}{l} x' = x+v_1 \\ \\ y' = y+v_2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x' = x + 0 \cdot y + v_1 \\ y' = 0 \cdot x+1 \cdot y + v_2 \\ 1 = 0 \cdot x+0 \cdot y + 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

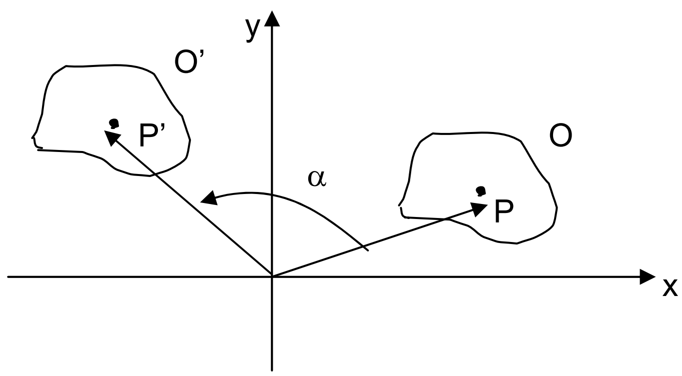
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ nennt man homogene Koordinate von P' bzw. P, Tv Translationsmatrix. Damit folgt die Matrizengleichung.

(4) P' = $T_v \cdot$P

bzw.

(5) P =$T_v^{-1} \cdot$P' ; $T_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Drehung um den Ursprung



(6) $x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$
$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$

⇔ (7) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

⇔ (8) P' = $D_\alpha \cdot P$; D_α Drehungsmatrix

D_α ist orthogonal, d.h. $D_\alpha \cdot D_\alpha^T = E$ und $D_\alpha^{-1} = D_\alpha^T$ sowie det $D_\alpha = +1$,

(9) $P = D_\alpha^{-1} \cdot P'$

Skalierung in bezug auf den Ursprung

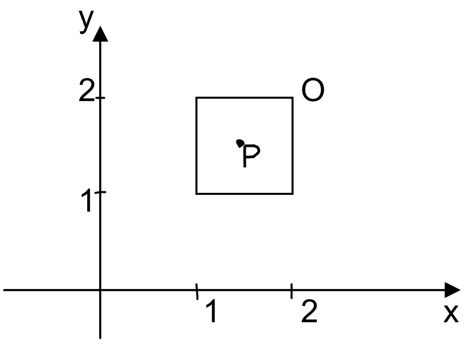
Eine Skalierung eines Objekt heißt Veränderung in der Länge in Bezug auf die y- und y-Richtung. Dabei werden positive Skalierungskonstanten s_x und s_y verwendet ; ist die Konstante größer 1, so bedeutet das eine Längenexpansion, kleiner 1 eine Längenkomprimierung.

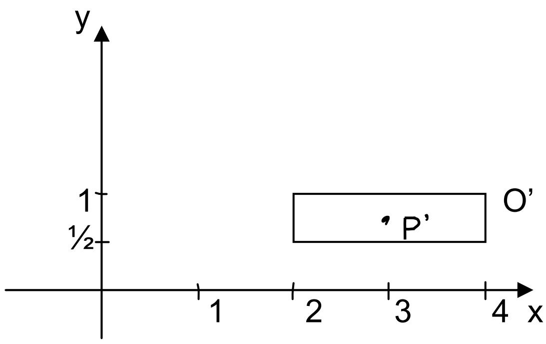
Diese Transformation wird durch folgende Matrizengleichung ermöglicht :

(10) $P' = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot P$

$P' = S_{s_x, s_y}\, P$

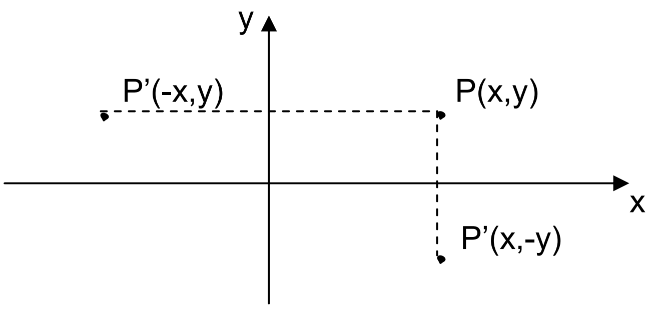
$P = S_{s_x,s_y}^{-1} \cdot P'$, wobei $S_{s_x,s_y}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} \end{pmatrix}$





Spiegelung an einer Achse

Betrachtet man die x- oder die y-Achse als Spiegel, so ist Objekt O' Spiegelbild von O, d.h. P und P' haben die gleiche Entfernung von der Spiegelachse.



Daraus ergeben sich die Matrizengleichungen der Transformationen :

(11) $P' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot P$

(12) $P' = M_x \cdot P$ (Spiegelung an der x-Achse)

(13) $P' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot P$

(14) $P' = M_y \cdot P$ (Spiegelung an der y-Achse)

und
(15) $P = M_x^{-1} \cdot P'$; $M_x^{-1} = M_x = M_x^T$
(16) $P = M_y^{-1} \cdot P'$; $M_y^{-1} = M_y = M_y^T$

Die Spiegelungsmatrizen M_x, M_y sind orthogonal und det M_x = det M_y = -1.
Abschließend noch eine rechentechnische Bemerkung. In den Aufgaben wird man mitunter auf Matrizenmultiplikationen $A \cdot B$ geführt, die aufgrund der verletzten Verkettungsbedingung (Anzahl der Spalten von A = Anzahl der Zeilen von B) nicht durchführbar sind. Das kann man durch Einführung homogener Koordinaten korrigieren: z.B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \delta & \varepsilon & \varphi \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \delta & \varepsilon & \varphi \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Aufgaben

Aufgabe 1
Der Punkt P(1;2) soll mit $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschoben werden. Wie lautet die Koordinaten von P'(x',y')?

Aufgabe 2
Verschieben Sie P(1;2) mit einem geeigneten Vektor v in den Ursprung O(0;0). Machen Sie die Probe, ob auch wirklich P'(0;0) herauskommt!

Aufgabe 3
Verschieben Sie das Dreieck Δ A(0;0); B(1;0); C(1;2) parallel zu y-Achse um den Betrag $2\sqrt{2}$. Wie lauten die Koordinaten der Punkte A', B', C'?
(Hinweis :Die Rechnung soll nicht punktweiße erfolgen, sondern in Gesamtheit; d.h., Sie müssen dem Dreieck eine Matrix zuordnen)

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Drehungsmatrix $D_\alpha=30^0$. Welche Koordinate hat der Punkt

P(2;-4) nach der Drehung?

Aufgabe 5
Drehen Sie den Punkt P(3;3) um 30^0 um den festen Punkt (1;1) (Rotationszentrum).
Wie lauten die Koordinaten P'?
(Hinweis : Verschieben Sie P zunächst in den Ursprung, führen die Drehung aus,
machen dann die Translation wieder rückgängig)

Aufgabe 6
Drehen Sie das Dreieck Δ : A(0;0),B()1;1,C(5;2) um 45^0

a) in bezug auf den Ursprung,
b) in bezug auf P(-1;-1).

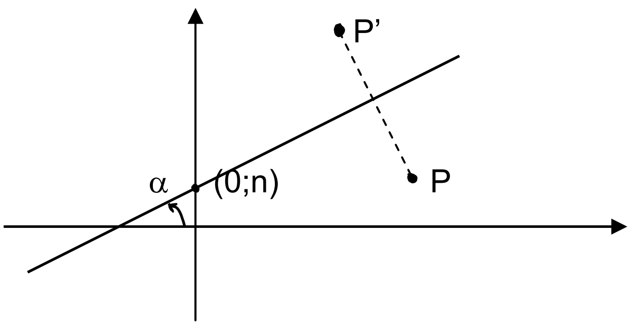
(Hinweis : Benutzen Sie für die Ecken A, B, C homogene Koordinate)

Aufgabe 7
Sie $P\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Wenden Sie darauf die Skalierungstransformation mit s_x=2 ; $s_y=\frac{1}{2}$ an.
Wie lautet P'(x',y')?

Aufgabe 8
Gegeben sei das Quadrat Q : A(1;1), B(2;1), C(2;2), D(1;2). berechnen Sie Q', falls
s_x=2 ; $s_y=\frac{1}{2}$. (Skizze)

Aufgabe 9
Berechnen Sie die Skalierungsmatrix S_{s_x,s_y} in bezug auf eine festen Punkt $P_0(x_0,y_0)$.

Aufgabe 10
Berechnen Sie die Transformationsmatrix M_g, die einen Punkt P an einer Gerade g spiegelt :



(Es genügt die Angabe des Matrizenprodukts für M_g)

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1

Mit (2) folgt :
$x' = x+v_1 = 1+1 = 2$
$y' = y+v_2 = 2+1 = 3$
oder auch mit (3) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ x'=2 ; y'=3.}$$

Aufgabe2
Mit (3) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3
Mit (3) :

$$\Delta' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_v} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A'(0; $2\sqrt{3}$); B'(1; $2\sqrt{2}$); C'(1; $2+2\sqrt{2}$).

Aufgabe 4
Aus (7) ergibt sich :

$$D_\alpha = 30^0 = \begin{pmatrix} \cos 30^0 & -\sin 30^0 \\ \sin 30^0 & \cos 30^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5
Die Lösung ergibt sich aus drei Schritten :

a) Das Rotationszentrum (1;1) wird durch v= $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in den Ursprung verschoben

$$P^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Drehung des Punktes P* um 30^0

$$P^{**} = \underline{\begin{pmatrix} \cos 30^0 & -\sin 30^0 \\ \sin 30^0 & \cos 30^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c) Der Ursprung wird zurück nach P verschoben und man erhält das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{P'}(\sqrt{3};2+\sqrt{3})$$

Aufgabe 6

a) Wir ordnen den Dreieck Δ die Matrix

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ zu.}$$

Mit (7) und (18) folgt

$$\Delta' = \begin{pmatrix} \cos 45^0 & -\sin 45^0 & 0 \\ \sin 45^0 & \cos 45^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Delta$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{7}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A'}(0;0);\ \text{B'}(0;\sqrt{2});\ \text{C'}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2};\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$$

b) Mit den Lösungsschritten der Aufgabe 5 ergibt sich zusammengefasst folgendes Matrizenprodukt

$$\Delta' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_v} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D_\alpha = 30^0} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_v} \cdot \Delta$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3\sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 2\sqrt{2} & \frac{9}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A'(-1; $\sqrt{2}$-1); B'(-1; $2\sqrt{2}$-1); C'(3$\sqrt{2}$-1; $\frac{9}{2}\sqrt{2}$-1).

Aufgabe 7
Mit (10) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$$Q' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Den Lösungsschritte von Aufgabe 5 folgen, wobei v=$\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$:

$$S_{s_x,s_y,} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & -s_x + x_0 \\ 0 & s_y & -s_y + y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10
Lösungsschritte :

a) Den Punkt (0;n) in den Ursprung verschieben v=$\begin{pmatrix} 0 \\ -n \end{pmatrix}$

b) Drehen um -α, sodass g mit der x-Achse zusammenfällt

$$D_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

c) Spiegelung an der x-Achse

$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) Zurückdrehen um α

$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

e) Den Ursprung in (0;n) zurückschieben

$T_{-v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad M_g = T_{-v} \cdot D_\alpha \cdot M_x \cdot D_{-\alpha} \cdot T_v \;; \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}$

Literaturverzeichnis

Gärtner/Bellmann/Lyska/Schmieder: Analysis in Fragen und Aufgaben; B.G. Teubner Verlagsgesellschaft , Stuttgart – Leipzig, 1995

Gellert/Kästner/Neuber, Siegfried: Fachlexikon ABC der Mathematik; Verlag Harri Deutsch; Thun und Frankfurt/Main

Neuber, Siegfried: Vorlesungen und Übungen zur Mathematik für Informatiker; (unveröffentlicht)

Wenzel/Heinrich: Übungsaufgaben zur Analysis 1; B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990