Prof.Dr. Neuber (em.)

Elementare Funktionen

1. Skizziere: $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ (ohne Differenzialrechnung)

2. Skizziere: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

Lösungen

Elementare Funktionen

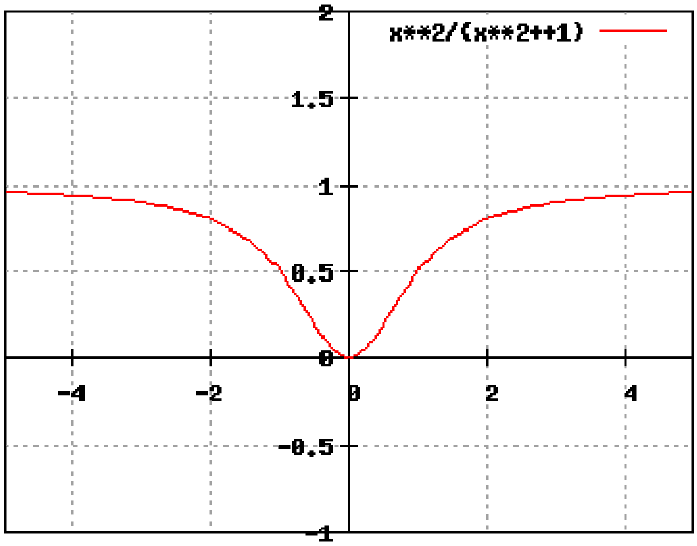
1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Nullstelle: Zähler=0, Nenner ungleich Null.
Also $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Für x=0 ist der Nenner ungleich Null $\Rightarrow$ x=0 ist Nullstelle von f.
Da der Nenner $x^2+1 \neq 0$ für alle x, ex. kein Pol, d.h. eine Stelle auf der x-Achse, bei deren Annäherung die Funktionswerte gegen + oder – Unendlich streben. Man erkennt durch eine einfache Umformung, dass die Funktionswerte nur zwischen Null und Eins schwanken.

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$, Zähler und Nenner durch x^2 (äquivalente Umformung).

Da $1+\frac{1}{x^2}$ stets positiv ist, ist der gesamte Quotient positiv. Weiter ist $1+\frac{1}{x^2} > 1 \Rightarrow$
$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$.

Skizze: y(x)=1 ist Asymptote, d.h., die Funktionswerte kommen dieser Geraden beliebig nahe, aber erreichen sie nicht.

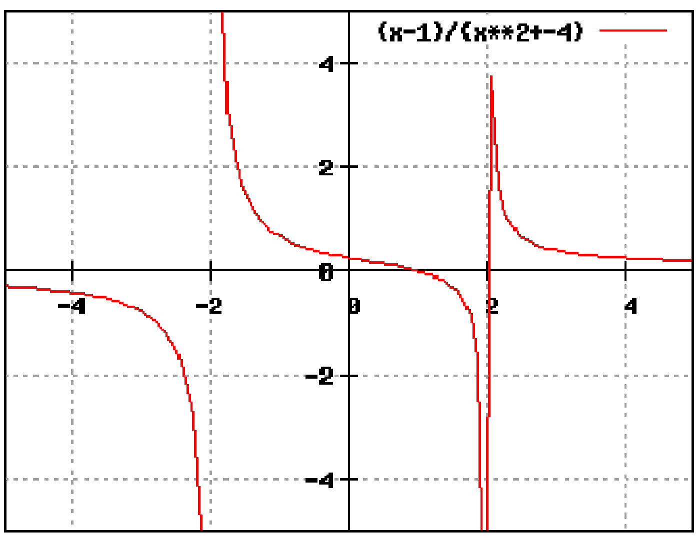


2. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

Nullstelle: x-1=0 , also x=1. für x=1 ist der Nenner aber ungleich Null, also handelt es sich um eine Nullstelle.

Polstellen: $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=2, x_2=-2$. Daraus folgt $x^2-4=(x+2)(x-2)$ (Linearfaktorzerlegung). Folgt aber auch durch Anwendung der 3. Binom. Formel. Für diese Werte ist der Zähler aber ungleich Null, also handelt es sich um Pole, genauer um <u>ungerade</u> Pole, da der Exponent der Linearfaktoren (x-2) und (x+2) gleich 1 ist. Das hat Bedeutung für das Verhalten der Fu-Werte an der Polstelle. Sie „springen" von + nach – Unendlich oder umgekehrt.

Skizze: Links vom Pol -2 sind die Funktionswerte negativ: $x^2-4<0$. Rechts vom Pol springt die Funktion nach + Unendlich, fällt dann ab und geht durch die Nullstelle 1 nach – Unendlich, springt wieder nach + Unendlich , um dann sich an die x-Achse anzuschmiegen. Denn für x>2 ist der Ausdruck stets positiv, aber Nennergrad ist größer als der Zählergrad, also geht der Ausdruck mit wachsendem x gegen Null.



x=-2 und x=2 sind Polgeraden.