

Prof. Dr. S. Neuber (em.)

Das Lösen von Gleichungen (gemischte Typen)

1. Löse nach „x“ auf:  $\sin(2x) = 1$ ,  $-\pi < x \leq \pi$ . (goniometrische Gl.)

2. Löse die Wurzelgleichung nach „x“ auf:  $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0$

3. Löse die Exponentialgleichung nach „x“ auf:  $e^{2x-1} = e^x$  und geben Sie eine graphische Interpretation.

4. Löse nach q auf:

$$ab - F = \frac{qa}{q-1}, q \neq 1.$$

5.  $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x+1}$  nach x auflösen,  $x \neq 2$  u.  $x \neq -1$ , da sonst Nenner = 0.

6.  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$  nach u auflösen.

7.  $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{1-x}{x} = \frac{3x-6}{x-1}$ ,  $x \neq 0, -3, 1$

8.  $\sqrt[3]{4 + \sqrt[2]{2x+5}} = 3$ , es muss nach Def. der Quadratwurzel  $2x+5 \geq 0$  sein, also

$x \geq -\frac{5}{2}$ . Der Radikand  $4 + \sqrt[2]{2x+5}$  der 3. Wurzel ist  $\geq 0$ .

9.  $a \cdot c^{2b-1} = d^{b+1}$  nach b auflösen.

10. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$  (Biquadratische Gleichung, d.h. die Potenzen in x haben nur gerade Exponenten).

b)  $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$

11. Lösen Sie folgende Logarithmengleichungen:

a)  $\ln x = 1,7$  (eine Grundgleichung),

b)  $1 + \ln x = 2 \ln(x - 1)$ ,

c)  $\ln \sqrt{a^2 + 1} - b = 0$  (nach a auflösen),

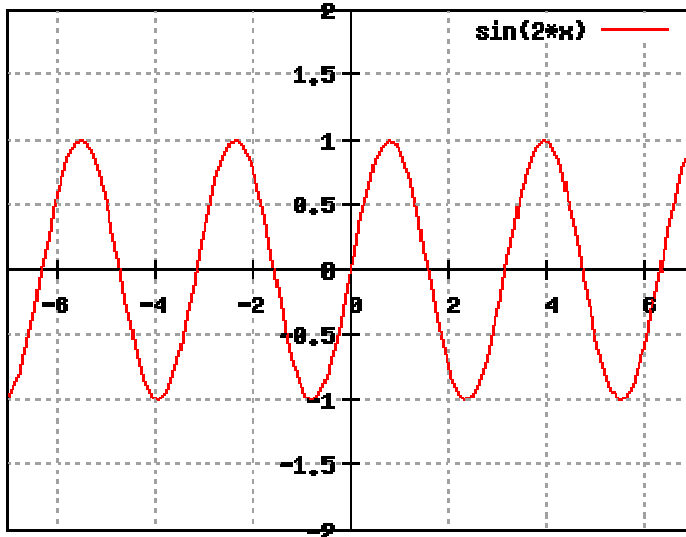
d)  $\ln |y| = \ln |x| + c$ , (x,y variabel; c konstant),

e)  $\ln |2 + y| = \frac{x^2}{2} + x + c$  (x,y variabel; c konstant),

f)  $-\frac{1}{\alpha} \ln \frac{F - \alpha v}{F} = \frac{1}{m} (t - t_0)$ , (auflösen nach  $v$ ).

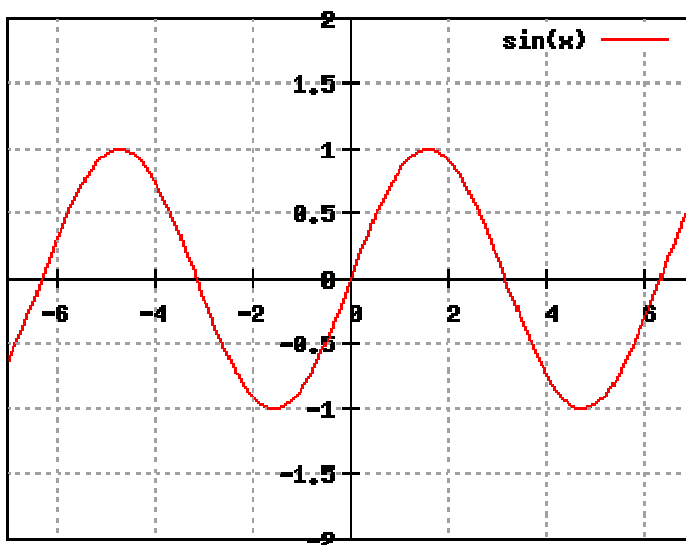
### Lösungen

1.  $\sin(2x) = 1$ ,  $-\pi < x \leq \pi$  ( es ist nur das Kurvenstück zwischen -3,14 u. +3,14 gemeint – den Rest kann man gedanklich streichen.)



Setzen wir  $z=2x \Rightarrow \sin(z)=1$  ,  $-2\pi < z \leq 2\pi$

$$\sin(z) = 1 \Rightarrow \text{für } z_1 = \frac{\pi}{2}, z_2 = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{z_1}{2} = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{z_2}{2} = -\frac{3\pi}{4}$$



Hinweis: x durch z ersetzen.

2. Prinzip: Ein Wurzelausdruck wird auf der linken Seite isoliert:

$$(1) \quad \sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} \quad (2)$$

Gleichung (2) wird quadriert . ACHTUNG: Quadratur einer Gleichung ist generell keine äquivalente Umformung, d.h. die am Ende der Rechnung erhaltenen Ergebnisse müssen nicht oder nur teilweise Lösungen sein. Deshalb ist eine Probe an der Ausgangsgleichung unerlässlich. Genaueres erfahren Sie

in meinem Buch „Zum Sprachgebrauch der Mathematik“ oder „Mathematischer Sprachgebrauch“ ([www.usneuber.de/mathe](http://www.usneuber.de/mathe)).

Aus (1) folgt dann mithilfe der 1. Bin. Formel:

$$x = x - 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1} + 2x - 1 \quad | \text{ wir isolieren auf der rechten Seite}$$

$$-2x + 2 = 2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1} \quad | :2$$

$$1 - x = \sqrt{x-1}\sqrt{2x-1} \quad | \text{ quadrieren}$$

$$1 - 2x + x^2 = (x-1)(2x-1) = 2x^2 - x - 2x + 1 \quad | \text{ auf der li. Seite nach Potenzen von } x \text{ ordnen}$$

$$-x^2 + x = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x = x_1 = 0 \text{ u. } 1-x = 0 \Rightarrow x = x_2 = 1.$$

Probe in (1):  $x = 0$  entfällt, da die 2. u. 3. Wurzel im Reellen nicht definiert ist.

$x = 1$  führt zu der wahren Aussage  $0=0$ , also Lösung.

3.  $e^{2x-1} = e^x$ . Zur Auflösung benutzen wir – wie in der höheren Mathematik üblich – Logarithmus naturalis.  $\ln x = \log_e x$ :

$$e^{2x-1} = e^x \quad | \ln \rightarrow \ln(2x-1) = \ln e^x$$

$$(2x-1) \ln e = x \ln e \quad | \ln e = 1$$

$$2x - 1 = x \rightarrow x = 1.$$

Graph. Interpretation: Die Kurven der linken u. rechten Seite der Gleichung schneiden einander bei  $x = 1$ .

$$4. \quad ab - F = \frac{qa}{q-1} \quad | (q-1)$$

$$(ab - F)(q-1) = qa$$

$$abq - ab - Fq + F = qa \quad | \text{Sortieren: linke Seite Ausdrücke mit } q$$

$$abq - Fq - qa = ab - F \quad | q \text{ ausklammern}$$

$$q(ab - a - F) = ab - F$$

$$q = \frac{ab - F}{ab - a - F}$$

5. Die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren – sollte man bei Bruchgleichungen generell machen, um so sofort alle Brüche auf beiden Seiten zu beseitigen.

$$\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x+1} \quad | (x-1)(x+1)$$

$$4(x+1) = 2(x-2), \text{ ordnen nach } x, \text{ dann folgt } x=-4.$$

$$6. \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1 \quad | \text{ mal } (uv)$$

$$v + u = uv \rightarrow u - uv = -v \rightarrow u - uv = -v \rightarrow u(1 - v) = -v$$

$$\rightarrow u = \frac{-v}{1-v} = \frac{v}{v-1} \text{ (Zähler u. Nenner mit } -1 \text{ multipliziert)}$$

$$7. \frac{2x-1}{x+3} - \frac{1-x}{x} = \frac{3x-6}{x-1} \quad | \text{ HN: } (x+3)x(x-1)$$

$$\rightarrow (2x-1)(x)(x-1) - (1-x)(x+3)(x-1) = (3x-6)x(x+3).$$

Multipliziert man die Klammern aus und fasst zusammen, so folgt die quadratische Gleichung

$$-5x^2 + 14x + 3 = 0 \quad | : (-5)$$

$$x^2 - \underbrace{\frac{14}{5}}_p x - \underbrace{\frac{3}{5}}_q = 0. \text{ Anwenden der Lösungsformel: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Es ergibt sich  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -0,2$ .

$$8. \sqrt[3]{4 + \sqrt[2]{2x+5}} = 3 \quad | \text{ hoch } 3$$

$$\rightarrow 4 + \sqrt[2]{2x+5} = 27 \quad (*)$$

$$\rightarrow \sqrt[2]{2x+5} = 23 \quad | \text{ hoch } 2$$

$$\rightarrow 2x + 5 = 524$$

$$\rightarrow x = 262 \geq -\frac{5}{2} \rightarrow \text{ist Lösung der Gleichung. Kann man auch durch eine Probe}$$

in der Ausgangsgleichung bestätigen.

9. Da die Variable  $b$  im Exponenten auftaucht, handelt es sich um eine Exponentialgleichung. Zur Auflösung benutzt man die Umkehroperation „Logarithmus“, da

$e^{\ln x} = x$  bzw.  $\ln e^x = x$ . Vgl. Sie die Grundformeln und Hinweise unter „Potenzen, Wurzeln, Logarithmen“!

$$a \cdot c^{2b-1} = d^{b+1} \quad | \ln$$

$$\ln(a \cdot c^{2b-1}) = \ln(d^{b+1}) \quad | \text{ mit (L1) u. (L3)}$$

$$\ln a + (2b - 1) \ln c = (b + 1) \ln d \quad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$\ln a + 2b \ln c - \ln c = b \ln d + \ln d \quad | \text{ ordnen}$$

$$2b \ln c - b \ln d = \ln d + \ln c - \ln a$$

$$b (2 \ln c - \ln d) = \ln d + \ln c - \ln a$$

$$b = \frac{\ln d + \ln c - \ln a}{2 \ln c - \ln d} .$$

Wendet man auf die letzte Gleichung die Formelgruppe (L..) von "rechts nach links" gelesen an,

$$\text{so folgt schrittweise: } b = \frac{\ln(dc) - \ln a}{\ln c^2 - \ln d} = \frac{\ln \frac{dc}{a}}{\ln \frac{c^2}{d}} .$$

$$10. \text{ a) } x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

$$\text{Substitution: } z = x^2 \rightarrow z^2 - 3z + 2 = 0 \text{ (quadratische G. in z).}$$

$$\text{Mihilfe der Lösungsformel } z_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\rightarrow z_1 = 2 = x^2 \rightarrow x_{1;2} = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{und } z_2 = 1 = x^2 \rightarrow x_{3;4} = \pm 1.$$

$$\text{b) } x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0 . \text{ Da das absolute Glied fehlt, kann man } x^3 \text{ ausklammern:}$$

$$x^3 (x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow x^3 = 0 \text{ oder } (x^2 - 3x + 2) = 0,$$

$$\rightarrow x_{1;2;3} = 0 \text{ (3-fache Nullstelle). Sie wird aufgrund des } \underline{\text{Fundamentalsatzes der Algebra}}$$

formal 3-mal gezählt. Natürlich ist es nur eine Nullstelle (Lösung).

$$\text{Weiter folgt aus } (x^2 - 3x + 2) = 0 : x_4 = 2 ; x_5 = 1.$$

$$11. \text{ a) } x = e^{1,7} , \text{ b) } x_{1,2} = \frac{e+2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{e(e+4)} = \frac{1}{2} (e + 2 \pm \sqrt{e(e+4)}),$$

$$\text{c) } a = \pm \sqrt{e^{2b} - 1} , \text{ d) } y = Kx , \text{ e) } y = Ke^{\frac{x^2}{2} + x} - 2 , \text{ f) } v = \frac{F}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}(t-t_0)}) .$$

Ausführliche Lösungen:

**Grundsätzliches:** Die Gleichung  $e^y = x$  (1) ist äquivalent der Gleichung  $y = \ln x$ ; (2)  $e, x$  sind gegeben,  $y$  gesucht. Der Logarithmus ist nur ein anderer Name für den gesuchten Exponenten  $y$ . Es folgt sofort die wichtige Beziehung  $e^{\ln x} = x$  ((2) mit (1) über  $y$  koppeln).

So gesehen kann man natürlich Aufgabe 11a) so lösen

- i)  $\ln x = 1,7 = y$  ist äquivalent mit  $e^{1,7} = x \approx 5,47$ .
- ii)  $\ln x = 1,7$  (3)  $\rightarrow e^{\ln x} = e^{1,7} \approx 5,47$ .

Es wurden beide Seiten der Gleichung (3) zur Basis „e“ potenziert.

Das ist der prinzipielle Weg zur Lösung Log. Gleichungen.

11 d)  $\ln |y| = \ln|x| + c$ , (x,y variabel; c konstant),

Beide Seiten der Gleichung zur Basis „e“ potenzieren:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c}$$

$$|y| = e^{\ln|x|} \cdot e^c \text{ (vgl. P3)}$$

$$= |x| e^c. \text{ Da } e, c \text{ konstant, führen wir für } e^c \text{ die Konstante } K \text{ ein.}$$

$|y| = K |x|$  (4). Löst man die Beträge auf beiden Seiten auf:

$\pm y = K(\pm x) = \pm Kx$ . Das  $(\pm)$  der linken Seite verschmilzt mit dem  $(\pm)K$  zu  $K'$ .

Also bekommt die Lösung die Form:  $y = K' x$ .

Natürlich kann (4) schon als Lösung angesehen werden. Doch oft geht man zur Betragsfreien Darstellung über.

Ein anderer Rechenweg:

$$\ln |y| = \ln|x| + c \rightarrow \ln|y| - \ln|x| = c \rightarrow \ln \frac{|y|}{|x|} = c \text{ (L2)}.$$

Dann gilt mit den Rechenregeln für Beträge:

$$\ln \left| \frac{y}{x} \right| = c \rightarrow e^{\ln \left| \frac{y}{x} \right|} = e^c \rightarrow \left| \frac{y}{x} \right| = e^c \rightarrow \pm \frac{y}{x} = e^c \rightarrow \frac{y}{x} = \pm e^c = K''.$$

Schließlich  $y = k''x$ .

Es kommt nicht auf die Bezeichnung der Konstanten an. Die Lösungen sind identisch.

11. b)  $1 + \ln x = 2 \ln(x - 1)$ .

Beide Seiten der Gleichung zur Basis e potenzieren,

$$e^{1+\ln x} = e^{2 \ln(x-1)},$$

$$e^1 e^{\ln x} = e^{\ln(x-1)^2}.$$

Der Schritt auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist wichtig, um  $e^{\ln x} = x$  anwenden zu können.

$$\text{Also } e^1 e^{\ln x} = e^{\ln(x-1)^2} = (x-1)^2$$

Es geht mal zur Abwechslung handschriftlich weiter:

$$e \cdot x = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - ex = 0$$

$$x^2 - (2+e)x + 1 = 0 \quad (\text{qu. Gleichung: } p = -(2+e) \\ q = 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{2+e}{2} \pm \sqrt{\frac{(e+2)^2}{4} - 1} \\ &= \frac{2+e}{2} \pm \sqrt{\frac{(e+2)^2 - 4}{4}} \\ &= \frac{2+e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2 + 4e + 4 - 4}{4}} \\ &= \frac{1}{2}(e+2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{e(e+4)} \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \left( e+2 \pm \sqrt{e(e+4)} \right)$$

11 c)  $\ln \sqrt{a^2+1} - b = 0$  (nach a auflösen).

$$\Rightarrow \ln \sqrt{a^2+1} = b$$

$$e^{\ln \sqrt{a^2+1}} = e^b$$

$$\sqrt{a^2+1} = e^b \quad | \uparrow 2$$

$$a^2+1 = (e^b)^2 = e^{2b}$$

$$a^2 = e^{2b} - 1 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{e^{2b}-1}$$

$$|a| = \sqrt{e^{2b}-1} ;$$

da  $|a| = \pm a$  folgt

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{e^{2b}-1}$$

---

11 e)  $\ln |2+y| = \frac{x^2}{2} + x + C$

$$e^{\ln |2+y|} = e^{\frac{x^2}{2} + x + C}$$

$$|2+y| = e^{\frac{x^2}{2} + x} \cdot e^C$$

$$2+y = \underbrace{\pm e^C}_K e^{\frac{1}{2}x^2 + x}$$

$$y = K e^{\frac{1}{2}x^2 + x} - 2$$

---

$$11.f) \rightarrow \frac{1}{\alpha} \ln \frac{F - \alpha v}{F} = \frac{1}{m} (t - t_0) \quad | \cdot (-\alpha)$$

$$\ln \frac{F - \alpha v}{F} = -\frac{\alpha}{m} (t - t_0) \quad | \text{ e hoch}$$

$$e^{\ln \frac{F - \alpha v}{F}} = e^{-\frac{\alpha}{m} (t - t_0)}$$

$$\frac{F - \alpha v}{F} = e^{-\frac{\alpha}{m} (t - t_0)}$$

$$F - \alpha v = F e^{-\frac{\alpha}{m} (t - t_0)}$$

$$\alpha v = F - F e^{-\frac{\alpha}{m} (t - t_0)}$$

$$= F (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} (t - t_0)})$$

$$v = \frac{F}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} (t - t_0)})$$