

## Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

### Grundformeln

Potenzen:  $a^n b^n = (ab)^n$ ,  $n > 1$  natürliche Z. (P1)

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (\text{P2})$$

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad (\text{P3})$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ für } n > m. \quad (\text{P4})$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (\text{P5})$$

Insbesondere gilt:  $a^0 = 1, a \neq 0$ ;  $0^0$  nicht def.;  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Wurzeln:  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  und  $a, b \geq 0$  gilt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (\text{W1})$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; b \neq 0 \quad (\text{W2})$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt{nm}{a^{n+m}} \quad (\text{W3})$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt{nm}{a} \quad (\text{W4})$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (\text{W4a}), \text{ Kürzen des Wurzelexponenten}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad (\text{W5}), \text{ speziell: } \sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$a \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{n+1}} \quad (\text{W6})$$

Der Zusammenhang zwischen den Potenz- u. Wurzelgesetzen wird durch die Definitionsgleichung  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ,  $a \geq 0$  (W7) gegeben. Damit lassen sich alle Wurzelgesetze nachweisen.

**Hinweis 1 :** Es ist stets  $\sqrt[n]{a} \geq 0$  für beliebiges  $n$ .

Daher ist  $\sqrt{x^2} = |x|$  ! (wird oft falsch gemacht).

Wird  $x \geq 0$  vorausgesetzt, so ist  $\sqrt{x^2} = x$ .

Z.B.  $\sqrt{4} = 2$ , nicht  $-2$ , obwohl  $(-2)^2 = 4$ .

Löst man die quadratische Gleichung  $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \rightarrow |x| = 2 \rightarrow x = \pm 2$ .

Betragsdefinition:  $|a| = \begin{cases} +a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \rightarrow \text{u. a. } |a| = \alpha \rightarrow a = \pm \alpha$ ,

geometrische Interpretation:  $|a|$  Abstand der Zahl  $a$  vom Nullpunkt.

$|a - a_0| = \alpha \rightarrow$  Abstand von  $a$  zu  $a_0$ ,  $a_0$  feste Zahl.

Z.B.  $|a - 1| = 1$  bedeutet: alle Zahlen  $a$ , die von  $+1$  den Abstand 1 haben, also  $a=0$  und  $a=2$ .

Die Ungleichung  $|a - a_0| \leq \alpha$  bedeutet: alle Zahlen  $a$ , deren Abstand von  $a_0$  kleiner oder gleich  $\alpha$  ist, d.h. alle Zahlen  $a$ , die im Intervall  $a_0 - \alpha \leq a \leq a_0 + \alpha$  liegen.

Logarithmen: Gegeben sei  $a, c$ , gesucht:  $b$ , mit  $a^b = c$ . Für den gesuchten Exponenten schreibt man auch  $b = \log_a c$ : Logarithmus von  $c$  zur Basis  $a$ , etwa

$$2^b = 8 \rightarrow b = \log_2 8 = 3, \text{ denn } 2^3 = 8.$$

In der höheren Mathematik verwendet man überwiegend die Basis  $a=e$  (transz. Zahl):  
 $b = \ln c$  (natürlicher Logarithmus).

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad (\text{L1})$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad (\text{L2})$$

$$\ln a^\beta = \beta \cdot \ln a \quad (\text{L3})$$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \ln a \quad (\text{L4})$$

Sie müssen alle Gleichungen von „links nach rechts“ und umgekehrt lesen!

$$1. (-3a^2)^3 =$$

$$2. \text{Bringe unter eine Wurzel: } \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = ?$$

Zeigen Sie mithilfe obiger Rechenregeln folgende Gleichungen:

$$3. (-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$4. (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

$$5. (q^m - 1)(q^m + 1) = q^{2m} - 1$$

$$6. \frac{\left(\frac{2x-3y}{4}\right)^4}{\left(\frac{4x^2-9y^2}{8}\right)^4} = \left(\frac{2}{2x+3y}\right)^4$$

7. Durch Ausklammern in ein Produkt verwandeln:

$$t^{n+2} - 3t^n + t^{n-1}.$$

$$8. \text{Soweit wie möglich vereinfachen: } \left[\left(\frac{1}{t^{-3}}\right)^{-4}\right]^{-2}.$$

9. Gegeben sei der Ausdruck  $\sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $x, y \neq 0$ .

a) Wie lautet die Bedingung für den Radikanden, damit der Wurzelwert existiert?

b) Bringen Sie „x“ vor die Wurzel, so dass das Produkt  $x \cdot \sqrt{\dots}$  entsteht.

10. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

$$a) \sqrt{(-3)^2} = -3, \quad b) \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3, \quad c) \sqrt[3]{-27} = -3,$$

$$d) \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3, \quad e) \sqrt{(a+b)^2} = a+b, \quad f) \sqrt{a^2 + b^2} = |a| + |b|.$$

11. Rationalmachen des Nenners: Tritt im Nenner eines Bruches ein Wurzelausdruck auf, so muss man den häufig beseitigen, d.h. aus dem irrationalen Ausdruck wird ein rationaler Ausdruck (wurzelfrei).

Beispiel:  $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ , erweitern mit  $\sqrt{a}$ , da  $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$ , vgl. (W1).

Machen Sie folgende Ausdrücke in diesem Sinne rational:

$$\text{a) } \frac{a}{\sqrt[7]{a^3}} \quad \text{b) } \frac{1}{a-\sqrt{b}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[4]{x}}$$

## Lösungen

Hinweis 2: a)  $p \xrightarrow{(P5)} q$  soll z.B. heißen: Mit Regel (P5) folgt aus Ausdruck p der Ausdruck q.

b)  $p \xleftrightarrow{(P5)} q$  soll heißen: Mit Regel (P5) folgt die Äquivalenz der Ausdrücke p und q, die Ausdrücke sind gleichwertig. Die Ausdrücke können beliebige Terme oder Aussagen sein.

$$1 \quad (-3a^2)^3 = (-3)^3 (a^2)^3 = -27a^6, \text{ mehrfache Anwendung von (P5).}$$

$$2. \quad \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x\sqrt{\sqrt{x^2}x}} = \sqrt{x^4\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{x^4x^3} = \sqrt[8]{x^7},$$

*schrittweise Anwendung von (W6) – von innen nach außen.*

$$3. \quad (-a)^{2n} = [(-a)^2]^n \quad (\text{vgl. (P5)}) \\ = (a^2)^n \\ = a^{2n}.$$

$$4. \quad (-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} (-a^1) \quad (\text{vgl. (P3)}) \\ = a^{2n} (-a)^1 \\ = -a^{2n+1}.$$

Insbesondere ist  $(-1)^{2n+1} = -1$ .

$$5. \quad (q^m - 1)(q^m + 1) = q^{2m} - 1 \quad \text{folgt aus der 3. Binomischen Formel} \\ (a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \text{ wobei } a = q^m, b = 1.$$

$$6. \quad \frac{\left(\frac{2x-3y}{4}\right)^4}{\left(\frac{4x^2-9y^2}{8}\right)^4} = \left(\frac{\frac{2x-3y}{4}}{\frac{4x^2-9y^2}{8}}\right)^4 \\ = \left(\frac{(2x-3y)8}{4(4x^2-9y^2)}\right)^4, \text{ gekürzt 8 gegen 4 u. Anwendung der 3. Bin.F. im}$$

Nenner, so folgt

$$= \left(\frac{(2x-3y)2}{(2x+3y)(2x-3y)}\right)^4$$

$$= \left( \frac{2}{2x+3y} \right)^4$$

7. Formen Sie in ein Produkt um:  $t^{n+2} - 3t^n + t^{n-1}$ . Wir klammern die Potenz  $t^{n-1}$  aus, d.h., es wird jeder Summand durch diesen Term mithilfe (P4) dividiert.

Etwa  $\frac{t^{n+2}}{t^{n-1}} = t^{n+2-(n-1)} = t^{n+2-n+1} = t^3$ , also folgt insgesamt

$t^{n-1}(t^3 - 3t + 1)$ . Durch Ausmultiplizieren macht man die Probe!

$$\begin{aligned} 8. \quad \left[ \left( \frac{1}{t^{-3}} \right)^{-4} \right]^{-2} &= [(t^3)^{-4}]^{-2} \\ &= (t^{-12})^{-2} \\ &= t^{24} \end{aligned}$$

9. a) Es muss  $x^2 - y^2 \geq 0$  sein. Daraus folgt die Bedingung umformuliert:

$$x^2 \geq y^2 \stackrel{\sqrt{\quad}}{\Rightarrow} |x| \geq |y|.$$

$$b) \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}, \text{ obigen Hinweis beachten } \sqrt{x^2} = |x|.$$

10. Welche der folgenden Aussagen sind falsch bzw. richtig?

a)  $\sqrt{(-3)^2} = -3$  ist falsch, da das Ergebnis eines Wurzelausdrucks nie negativ ist (Hinweis 1).

b)  $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$  ist richtig. Oder  $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ .

Aber nicht  $\sqrt{(-3)^2} = (-3)^{\frac{2}{2}} = (-3)^1 = -3$ : Verstoß gegen (W7), bei negativer Basis gilt die Gleichung nicht.

c)  $\sqrt[3]{-27} = -3$  ist falsch (analog a)).

d)  $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$  ist richtig, da das Wurzelsymbol nur für positiven Radikanden verwendet werden darf. Mit dieser Schreibweise kommt man zum gewünschten Ergebnis, da eben  $(-3)^3 = -27$  ist, und zwar eindeutig.

e)  $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$  ist falsch, da  $a+b$  auch negativ sein kann, also richtig:  $|a+b|$ .

f)  $\sqrt{a^2 + b^2} = |a| + |b|$  ist falsch, da es **kein** Wurzelgesetz der Art gibt:  $\sqrt{x+y} = x+y$ .

$$11. a) \frac{a}{\sqrt[7]{a^3}} = \frac{a \sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^3} \sqrt[7]{a^4}} = \frac{a \sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{a \sqrt[7]{a^4}}{a} = \sqrt[7]{a^4}.$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{1}{a-\sqrt{b}} &= \frac{a+\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} \quad (\text{im Nenner 3. Bin. Formel}) \\ &= \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[4]{a}} &= \frac{\sqrt[7]{a^3} \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4} \sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[7]{a^3} \sqrt[4]{a^3}}{a}; \text{ der Nenner ist rational, wir vereinfachen weiter:} \\
&= \frac{7 \cdot 4 \sqrt[7 \cdot 4]{a^{3 \cdot 4}} \sqrt[4 \cdot 7]{a^{3 \cdot 7}}}{a}, \text{ Wurzelexponent erweitern (W4a)} \\
&= \frac{28 \sqrt[28]{a^{12} a^{21}}}{a} \\
&= \frac{28 \sqrt[28]{a^{33}}}{a} \\
&= \frac{28 \sqrt[28]{a^{28} a^5}}{a}, \text{ } a^{33} \text{ geeignet zerlegen} \\
&= \frac{28 \sqrt[28]{a^{28}} \sqrt[28]{a^5}}{a} \\
&= \frac{a \sqrt[28]{a^5}}{a} = \sqrt[28]{a^5}.
\end{aligned}$$

Mittels Potenzgesetze:  $\frac{a^{\frac{3}{7}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{3}{7} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{12-7}{28}} = a^{\frac{5}{28}} = \sqrt[28]{a^5}.$

Geht sicher schneller. Betrachten Sie den vorigen Rechenweg als Übung der Wurzelgesetze, was auch notwendig ist.