Prof.Dr.Siegfried Neuber(em.)

Einfache Ungleichungen und Beträge

Einige Regeln:

(R1) $a < b \underset{c\ beliebig}{\Longleftrightarrow} a + c < b + c$
Eine Ungleichung bleibt bestehen (ihre Richtung), wenn
man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert.

(R2) $a < b \underset{c>0}{\Leftrightarrow} ac < bc$
Eine Ungleichung bleibt bestehen, falls man sie mit einer positiven Zahl multipliziert.

(R3) $a < b \underset{c<o}{\Leftrightarrow} ac > bc$
Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so muss
das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden (Richtungsänderung).

(R4) $0 < a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
Sind die Seiten einer Ungleichung beide positiv, so kann man man zum
Kehrwert übergehen und das Ungleichheitszeichen umkehren.

(R5) $a < b\ und\ c < d \Rightarrow a + c < b + d$

$$\Rightarrow ac < bd; \quad b, c > 0$$

Gleichgerichtete Ungleichungen können addiert werden. Gilt nicht allgemein für die Subtraktion. Ungl. Können unter eingeschränkten Bedingungen auch multipliziert werden.

(DF) $|a| := \begin{cases} a, falls\ a \geq 0 \\ -a,\ falls\ a < 0 \end{cases}$. **Kurz: |a|=$\pm \boldsymbol{a}$.**
|a| ist geometrisch der Abstand der Zahl vom Nullpunkt.
Damit ist |a| stets nichtnegativ. Achtung: -a ist positiv, falls a negativ!
$a \leq |a|$

(R6) $|a| = |-a|; die\ symmetrischen\ Zahlen\ a, -a\ haben\ denselben\ Abstand.$
Damit folgt: $|a - b| = |b - a|. Abstand\ der$ Zahlen a,b.
(R7) $|a - a_0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a_0 - \varepsilon \leq a \leq a_0 + \varepsilon$
(R8) |ab|=|a||b|
(R9) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
(R10) $|a^2| = |a|^{\,2} = a^2$

(R11) Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$.Der Betrag einer Summe ist nicht größer als die Summe der Beträge.

$(*) \Leftrightarrow$:..ist äquivalent zu … oder auch: Aus … folgt … und umgekehrt
(*) $\Rightarrow$ **:** Aus … folgt … (Implikation)

Aufgaben und Lösungen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge **L ,** folgender Ungleichungen:
a) $-3x + 2 < 4x - 9$,

<u>Lösung:</u> **L** = $\{x \in \boldsymbol{R}: x > \frac{11}{7}\}$
<u>Kommentierte Lösung:</u>
1.a) Wir isolieren die Variable x auf der linken Seite der Ungleichung.

$-3x + 2 < 4x - 9 \quad | -4x$ (Subtraktion auf beiden Seiten) ,

$\Leftrightarrow \quad -7x + 2 < -9 \quad | -2$,

$\Leftrightarrow \quad -7x < -11 \quad |:(-7)$ (Division ; beachte: Wird eine Ungleichung durch eine negative Zahl dividiert, so kehrt sich das Relationszeichen um),

$\Leftrightarrow \quad x > \frac{11}{7}$.

b) (a-x)b $> Kx$

<u>Lösung</u>: Menge **L** aller x mit $x \neq \frac{ab}{K+b}$.
<u>Kommentierte Lösung:</u>

(a-x)b $> Kx$

$\Leftrightarrow$ ab – xb $> Kx \quad | -Kx$

$\Leftrightarrow \quad ab - xb - Kx > 0 \quad | -ab$

$\Leftrightarrow \quad -xb - Kx > -ab$

$\Leftrightarrow \quad -x(b+k) > -ab,$ | :(-1) (Richtungsänderung)

$\Leftrightarrow \quad x(b+k) <$ ab (1).

Da (b+k) $\gtrless$ 0 muss eine Fallunterscheidung her.
1. Fall: b+k > 0 (Ungleichung ändert nicht ihre Richtung):
(1) $\Leftrightarrow \quad x < \frac{ab}{b+k}$.
2.Fall : b+k < 0 (Richtungsänderung):
(1) $\Leftrightarrow \quad x > \frac{ab}{b+k}$.

Zusammengefasst: Menge **L** aller x $\neq \frac{ab}{b+k}$.

c) $\frac{3x-1}{2x+2} > 1$

Lösung: **L** ={ xϵ **R:** $x < -1 \;\; oder \;\; x > 3$}

Kommentierte Lösung:

$$\frac{3x-1}{2x+2} > 1 \quad | \cdot 2$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+1} > 2$. (2)

Fallunterscheidung, da (x+1)$\lesseqgtr 0$.
1. Fall: x+1 >0 $\Rightarrow^{(*)}$ **x > -1.** Ungleichung (2) ist
$\Leftrightarrow \;\; 3x - 1 > 2(x+1)$
$\Leftrightarrow \;\; 3x - 1 > 2x + 2$
$\Leftrightarrow \qquad x > 3$.
Erste Teillösung : x > -1 **und** x > 3, also $L_1 = (3, +\infty)$ (Intervall links offen).
2.Fall: x+1< 0 ⇒ **x < -1.** Ungleichung (2) ist
$\Leftrightarrow \;\; 3x - 1 < 2x + 2$
$\Leftrightarrow \qquad x < 3$.
Zweite Teillösung: x < -1 **und** x < 3, also $L_2 = (-\infty, -1)$ (Intervall rechts offen).
Zusammengefasst: **L** = $L_1 \;\cup\; L_2$. Menge aller x<-1 **oder** x>3.

d) (3) $\frac{n+1}{n}\, a < 1$, $NB: (0 < a < 1)$, $n \in$ **N** (Menge der positiven natürlichen Z.)
Lösung: $n > \frac{a}{1-a}$
Kommentierte Lösung:
(3) $\Leftrightarrow \;\; (n+1)a < n$
$\Leftrightarrow \qquad na + a < n$
$\Leftrightarrow \qquad na + a - n < 0$
$\Leftrightarrow \quad n(a-1) < -a$. Wir teilen durch (a-1) < 0 (wegen obiger NB stets negativ).
$\Leftrightarrow \qquad n > \frac{-a}{a-1} = \frac{-a}{-(1-a)} = \frac{a}{1-a}$.

2. Zeigen Sie mithilfe der Sätze
(1) $a < b \; und \; c < d \;\; \rightarrow ac < bd \, , falls \; b, c > 0,$
(2) $a < b \; und \; ab > 0 \;\; \rightarrow \; \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$ dass
- $a < b \; und \; c > d \;\; \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

und für welche a gilt
- $a^2 - ab < (a-b)^2$, falls b>0 ?

2.
Lösung:
$c > d > 0 \xRightarrow[Satz2.(b)]{} 0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{d} \xRightarrow[Satz2.(a)]{} \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

3. Für welche **positiven** Zahlen a gilt: $a^2 - ab^2 < ab^2, b \neq 0\ beliebig$?

<u>Lösung:</u> $a < 2b^2$
<u>Kommentierte Lösung:</u>

$a^2 - ab^2 < ab^2$ | + a b^2
⇔ $a^2 < 2ab^2$ |: a>0
⇔ $a < 2b^2$.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge **L** über der Menge **R.**
a) $|a-4| < 6$ ist äquivalent mit $a_0 = 4, \varepsilon = 6: 4-6 < x < 4+6 \Rightarrow -2 < x < 10.$
Geometrisch. Gesucht war die Menge **L** aller a, deren Abstand von 4 kleiner als 6 ist.

b) |a+1|≥ 4. Gesucht ist die Menge L , deren Abstand von (-1) , weil a+1=a-(-1), größer oder gleich 4 ist. |a-(-1)|≥ 4 ⇔ $a \geq -1+4 = 3\ und\ a \leq -1-4 = -5$, d.h.
L=$(-\infty,-5] \cup [3,+\infty)$.

c) $|\frac{3}{2}x - 2| = \frac{5}{2} \underset{Df}{\Leftrightarrow} \frac{3}{2}x - 2 = \pm\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 3\ und\ x = -\frac{1}{3}$

d) |2x-1|<|x-1|. (1)

Üblicher Lösungsweg durch Fallunterscheidung.
Aus der Betragsdefinition folgt:

|2x-1|=$\begin{cases} 2x-1, für\ x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1)\ für\ \ x < \frac{1}{2} \end{cases}$ (2) $|x-1| = \begin{cases} x-1\ für\ x \geq 1 \\ -(x-1)\ für\ x < 1 \end{cases}$ (3).

Daraus ergeben sich folgende Fallunterscheidungen:
$\alpha)\ x \geq 1,\ \beta) \frac{1}{2} \leq x < 1,\ \gamma) x < \frac{1}{2}$.

α) Aus (1) wird mit (2) u. (3): $2x - 1 < x - 1 \Rightarrow\ x < 0, d.h. (1) ist\ für\ kein\ x \geq 1\ erfüllt.$
Die Teillösungsmenge ist leer.
β) Aus (1) wird $2x - 1 < -(x-1)\ \Rightarrow x < \frac{2}{3}$, dh. (1) gilt für $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$.
γ) Aus (1) wird $-(2x-1) < -(x-1) \Rightarrow\ x > 0, d.h. 0 < x < \frac{1}{2}$.
Alle 3 Fälle zusammengefasst: |2x-1|<|x-1| $L = (0, \frac{2}{3})$.

Ein anderer Weg umgeht die Fallunterscheidungen, wenn man folgendes bedenkt:
$0 < a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow\ |a| < |b| \Leftrightarrow |a|^2 < |b|^2 \underset{(R10)}{\Longleftrightarrow} a^2 < b^2$.
Man kann eine Betragsungleichnug quadrieren, ohne die Lösungsmenge aufgrund der Äquivalenz zu verändern. Dies führt auf eine quadratische Ungleichnug, die sich aber leicht mit Hilfe des Graphen der Parabel lösen läßt.
Nochmals |2x-1|<|x-1|.
|2x-1|<|x-1|$\underset{quadrieren}{\Longleftrightarrow}$ $|2x-1|^2 < |x-1|^2$

$$\Leftrightarrow\ (2x-1)^{\ 2} < \ (x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow\ 4x^2-4x+1 < \ x^2-2x+1$$
$$\Leftrightarrow\ 3x^2-2x < 0.$$

Geht man zur Gleichung $y = 3x^2 - 2x$ =0 über, so erhält man die Nullstellen x=0 und x=$\frac{2}{3}$.
y ist kleiner als Null für alle x innerhalb des Intervalls [0,$\frac{2}{3}$]. Also ist das offene Intervall (0,$\frac{2}{3}$) die Lösungsmenge.
Graph: