Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra in Übungen

1.1 Lineare Gleichungssyteme

Die folgenden Übungen sollen mithilfe des Einfachen Gaußschen Algorithmus gelöst werden.

Übungen

1.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 3x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 1 \\ x + y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

3.(Unterbestimmtes System:mehr Unbekannte als Gleichungen)

$$\begin{aligned} x + y + z + 2u &= 1 \\ 3x - y - 2z + u &= 4 \end{aligned}$$

4. (Homogenes System)

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

5.(Lineare Gleichung) $x + y + 2z - u + v = 0$

6.(Überbestimmtes System:Mehr Gleichungen als Unbekannte)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x - 3y &= -5 \\ 6x - 2y &= 1o \\ x + y &= 7 \end{aligned}$$

Mathematische Vorbesinnung

Grundlage des Verfahrens ist der einfache
Satz: Multipliziert man die i-te Gleichung eines gegebenen Systems **S** mit einem Faktor $\alpha \neq 0$ und addiert sie zur k-ten Gleichung, so dass sich nur die k-te Gleichung ändert, so ist das neue System **S*** äquivalent zu **S**, d.h. sie haben identische Lösungsmengen L.
Beispiel.

$$\begin{aligned} (S): 2x + 3y &= 1 \quad (1) \\ x + y &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

hat die Lösungen x=-1, y= 1 (Lösungsmenge $L = \{(-1, 1)\}$). Grafisch handelt es sich um den Schnittpunkt der beiden Geraden (1) und (2)

.

Multipliziert man (1) *gedanklich* mit 5 und addiert diese Zeile zu (2), so erhält man

$$\begin{aligned} (S*): 2x + 3y &= 1 \quad (1*) \\ 11x + 16y &= 5 \quad (2*). \end{aligned}$$

Es hat die die identische Lösungsmenge von (S), wovon man sich durch eine Probe überzeugen kann.

Der Einfache Gaußsche Algorithmus

Allgemeines lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

, wobei a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$, $m \neq n$,$m < n$.
Für **S** gibt es die kürzere Schreibweise: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ mit $i = 1, 2, \ldots, m$.Sind alle $b_i = 0$, so heißt das System *homogen*, ansonsten *inhomogen*. Besteht das System nur aus einer Zeile, so spricht man von einer *Linearen Gleichung*. In diesem Falle ist das Verfahren nicht anwendbar. Die Vorgehensweise wird in einer Aufgabe erläutert.

Aus dem Gleichungssystem (S) machen wir folgende Tabelle:

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	b_i
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$					
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\ldots$	a_{mn}	b_m

(S) kann man nun schrittweise in ein äquivalentes System (S*) mithilfe des obengenannten Satzes überführen. Dazu wählt man ein α derart, dass folgendes gestaffelte System (S*) entsteht:

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	b_i
a^*_{11}	a^*_{12}	a^*_{13}	$\ldots$	a^*_{1n}	b^*_1
0	a^*_{22}	a^*_{23}	$\ldots$	a^*_{2n}	b^*_2
0	0	a^*_{33}	$\ldots$	a^*_{3n}	b^*_3
	$\ldots$				
0	0	$\ldots$	a^*ll	a^*_{ln}	b^*_l
	$\ldots$				
0	0	$\ldots$	0	0	b^*_m .

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$
\begin{aligned}
a^*_{11}x_1 + a^*_{12}x_2 + \ldots + a^*_{1n}x_n &= b^*_1 \\
a^*_{22}x_2 + \ldots + a^*_{2n}x_n &= b^*_2 \\
&\ldots \\
a^*_{ll}x_l + \ldots + a^*_{ln}x_n &= b^*_l
\end{aligned}
$$

Für die Lösbarkeit und Lösungen des Systems gilt folgender

Satz. Ist eine der Zahlen $b^*_{l+1}, b^*_{l+2}, \ldots, b^*m$ von Null verschieden, so ist das System *unlösbar*.Es ist *lösbar*, wenn in den $(m - l)$ letzten Zeilen Nullen auftreten.
Es gilt dann:

a) Für $l = n$ ist die Lösung eindeutig.
b) Für $l < n$ sind $(n-l)$ freie Variable (Unbekannte) wählbar. Die Lösung besitzt dann $(n-l)$ freie Parameter - eine *unendliche* $(n-l)$*-fache Lösungsmannigfaltigkeit*.

Lösungen.

1. (S), $m = n = 3$

x	y	z	b_i
1	-2	2	1
2	-3	1	1
1	1	-4	1

Zeile 1 wird in das neue System (S*) übernommen. Multipliziert man gedanklich diese Zeile mit (-2) addiert sie und zur 2. Zeile, so ensteht die Zeile $0 \quad 1 \; -3 \quad -1$. Für diesen Rechenprozess schreiben wir künftig: Z2 := (-2)Z1+Z2. Links vom Ergibtzeichen steht die neue Zeile Z2, rechts davon die alte Zeile Z2.So ergibt Z3:=(-1)Z1 + Z3, also die Elemente $0 \; 3 \; -6 \; 0$. Schließlich folgt das System (S**), indem man aus (S*) die erste und zweite Zeile übernimmt und Z3:= (-3)Z2 + Z3, also hat die 3. Zeile von (S**) die Zahlen $0 \; 0 \; 3 \; 3$.
(S*)

x	y	z	b_i
1	-2	2	1
0	1	-3	-1
0	3	-6	0

(S**)

x	y	z	b_i
1	-2	2	1
0	1	-3	-1
0	0	3	3

$m = n = l = 3$. Nach obigen Satz ex. genau eine Lösung, die sich aus (S**) wie folgt ergibt: (3. Zeile) $3z = 3 \Rightarrow z = 1$, (2. Zeile) $y = 2$, (1. Zeile) $x - 2y = -1 \Rightarrow x = 3$.

2. (S):

x	y	z	b_i
1	1	1	2
3	2	1	2
2	3	4	3 .

Z2:=-3Z1+Z2; Z3:=-2Z1+Z3 $\Rightarrow$ (S*):

x	y	z	b_i
1	1	1	2
0	-1	-2	-4
0	1	2	-1 .

Durch Addition der Zeilen 2 u. 3 entsteht (S**):

x	y	z	b_i
1	1	1	2
0	-1	-2	-4
0	0	0	-5 .

Das System hat keine Lösung (L= $\{\}$); $l = 2$, $b_3 \neq 0$. Die letzte Zeile bedeutet doch $0x + 0y + 0z = -5 \Rightarrow 0 = -5$, was offensichtlich falsch ist. Eine Folge einer falschen Voraussetzung, und zwar des Ausgangssystems (S). Es sind widersprüchliche Gleichungen, deren Widerspruch man auf Anhieb nicht sieht; der sich im Laufe der Rechnung herauskristallisiert.

3. (S)

x	y	z	u	b_i
1	1	1	2	1
3	-1	-2	1	4

(S*) folgt aus Z2:=-3Z1 + Z2:

x	y	z	u	b_i
1	1	1	2	1
0	-4	-5	-5	1.

$m = 2, n = 4, l = 2 \Rightarrow$ l<n $\Rightarrow$ mit dem Satz (S) hat unendlich viele Lösungen. Man kann $(n - l) = 2$ freie Parameter wählen. Wir setzen $z = t_1, u = t_2$ (t_1, t_2 beliebig reell), so folgt aus (S*)

$$
\begin{aligned}
x + y &= 1 - z - 2u = 1 - t_1 - 2t_2 \\
-4y - 5z - 5u &= 1 \\
-4y &= 1 + 5z + 5u = 1 + 5t_1 + 5t_2 \\
-y &= \frac{1}{4} + 54 \cdot t_1 + \frac{5}{4} \cdot t_2 \\
x = -y + 1 - t_1 - 2 \cdot t_2 &= \frac{5}{4} + 14 \cdot t_1 - \frac{3}{4_2} \\
y &= -\frac{1}{4} - 54 \cdot t_1 - \frac{5}{4} \cdot t_2 \\
z &= t_1 \\
u &= t_2
\end{aligned}
$$

Die zweiparametrige Lösung kann man durch Einsetzen in das Ausgangssystem bestätigen. Wählt man z.B. $t_1 = t_2 = 0$, so erhält man aus der unendlichen Lösungsmenge die spezielle Lösung $x = \frac{5}{4}, y = -\frac{1}{4}, z = 0, u = 0$.
Probe: $x + y + z + 2u = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + 0 + 0 = 1$;
$3x - y - 2z + u = \frac{15}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 = 4$.
4. (S):

x	y	z	b_i
1	-2	2	0
2	-3	1	0
-1	1	1	0 .

Mit Z2:=-2Z1+Z2 und Z3:=Z1+Z3 folgt (S*):

x	y	z	b_i
1	-2	2	0
0	1	-3	0
0	-1	3	0 .

Addiert man einfach Z2+Z3 folgt (S**):

x	y	z	b_i
1	-2	2	0
0	1	-3	0
0	0	0	0 .

Mit dem Satz folgt, dass das System nichttriviale unendlich viele Lösungen hat und, dass man eine Variable frei wählen darf: $z = t$. Dann ergibt sich aus (S*): $x - 3z = y - 3t = 0 \Rightarrow y = 3t, x - 2y + 2z = x - 6t + 2t = 0 \Rightarrow x = 4t$, t beliebig. Für $t = 0$ folgt die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ – auch Nulllösung genannt.

5. Die lin. Gleichung wird nach der ersten Variablen aufgelöst, für die restlichen 4 Variablen werden Parameter gewählt, sodass die Gleichung eine unendliche 4-parametrige Lösung hat.
$x = -y - 2z + u - v \Rightarrow y = t_1, z = t_2, u = t_3, v = t_4$:
$x = -t_1 - 2t_2 + t_3 - t_4$,$t_i$ beliebig. Wählt man für die t_i konkrete Werte, so erhält man speielle Lösungen aus der unendlichen Menge; etwa wieder die Nulllösung mit $t_i = 0 \forall i$.

6.(S):

x	y	b_i
2	-1	5
1	-3	-5
6	-2	10
1	1	7

(S*): Z1,Z2 vertauschen.

x	y	b_i
1	-3	-5
2	-1	5
6	-2	10
1	1	7

(S**):Erste Spalte unter "1"Nullen erzeugen.

x	y	b_i
1	-3	-5
0	5	15
0	16	40
0	4	12

(S***):Erste Zeile mit "5"multiplizieren, zweite Zeile mit "3".

x	y	b_i
5	-15	-25
0	15	45
0	16	40
0	4	12

(S****): Z4 mal (-4), Z4:=Z3+Z4.

x	y	b_i
5	-15	-25
0	15	45
0	16	40
0	0	-8

In Z4 steht die falsche Aussage $0 = -8$, d.h. das System ist nicht lösbar.
Es geht auch einfacher: Man betrachtet etwa Z1,Z2 als Gleichungssystem mit 2 Unbekannten. Löst dieses traditionell (z.B. Einsetzungsverfahren), hier: $x = 4, y = 3$. Prüft die restlichen Gleichungen ob dieser Lösung. Z3 hat diese Lösung nicht - also das Gesamtsystem nicht lösbar.

Weitere Übungsaufgaben mit nicht kommentierten Lösungen siehe:

[4] Lineare Gleichungssyteme und Vektoralgebra Aufgabe 0.