Prof.Dr.S.Neuber
FB4/Wirtschaftsmathematik

Aufgaben : Lineare Algebra

0. Lösen Sie folgende Systeme mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von GAUß:

$x + 2y - 3z = -1$
$3x - y + 2z = 7$
$5x + 3y - 4z = 2$

$x + 2y - 3z = 6$
$2x - y + 4z = 2$
$4x + 3y - 2z = 14$

$x - 2y + 3z - 2w = 0$
$3x - 7y - 2z + 4w = 0$
$4x + 3y + 5z + 2w = 0$

$x + 2y - z = 0$
$2x + 5y + 2z = 0$
$x + 4y + 7z = 0$
$x + 3y + 3z = 0$

1. Sei (x-y,x+y,z-1) = (4,2,3) . Berechnen Sie x,y,z !

2. Sei a = (-1,2,5) , b = (3,-7,5). Wie ist der Vektor c zu wählen, damit a+c = b ?

3. Die Summe dreier Vektoren gleichen Betrages sei der Nullvektor O. Was läßt sich daraus über die Winkel zwischen diesen Vektoren schließen ?

4. Zeigen Sie :
   $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
   $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
   $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

5. Zeigen Sie :
   $a + (-a) = \vec{0}$; $a\ \vec{0} = \vec{0}$; $\lambda\vec{0} = \vec{0}$

6. Berechnen Sie den Ausdruck 3a – 2b + 4c für a=(1,2,-1); b=(-1,-1,-1) ; c=(3,2,-5).

7. Berechnen Sie den Einheitsvektor für a= (2,2,-1).

8. Zwei gegebene Vektoren a,b bilden die beiden Diagonalen eines Parallelogramms, dessen Seiten anzugeben sind .

9. Der Vektor a = (5,7,13) soll als Summe dreier Vektoren x,y,z dargestellt werden, die der Reihe nach den Vektoren d=(1,4,3); b=(1,2,0); c=(1,1,1) parallel sind. Geben Sie x,y,z an !

10. Gilt das Assioziativgesetz für das Skalarprodukt ? (Begründung)

11. Gegeben sind die Vektoren a=(2,-1,3); b=(-1,3,1) ; c=(4,0,4).
Berechnen Sie :
a) ab , ac , bc
b) (a+b)c und ac+bc
c) (ab)c und a(bc)
d) Für welches λ steht b+ λc auf a senkrecht ?

12. Bestimmen Sie alle zur Basis e_3 senkrechten Vektoren x vom Betrage 13, die mit a= $2e_1 - 3e_2 + \sqrt{3}e_3$ den Winkel $2\pi/3$ bilden.

13. Seien a,b,c $\in$ $\mathbf{R}^n$. Weisen Sie folgende Aussagen nach:
a) (a + b) c = ac + bc
b) (λa) b = λ(ab)
c) aa $\geq$ 0, und aa = 0 nur dann, wenn a = 0

14. Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren a, b $\in R^3$
a) a= (2,-1,2) , b=(-2,2,0) b) $a = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $b = 3e_1 - 4e_3$ (Aufg. 32.10.)
15. Berechnen Sie die Projektionen a_b:
a) a= $e_1 + 4e_2$, $b = 3e_1 + e_2$ b) $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $b = e_1$ 32.4.a,d.
16. Zeigen Sie, daß
$a_b \| b \ und \ (a_b - a)$ senkrecht auf b !
17. Beweisen Sie mit Hilfe von Vektoren den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie und den Satz des Pythagoras !
18. Weisen sie nach, daß für beliebige reelle Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt:
$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1{}^2 + a_2{}^2)(b_1{}^2 + b_2)^2$$

19. Gegeben sind die Vektoren $a = 5e_1 - 3e_2 - 2e_3$, $b = 2e_1 + 2e_2 - 3e_3$, $c = e_1 - 4e_2 + 2e_3$.
Man zeige, daß diese Vektoren eine Basis bilden und stelle den Vektor $c = 2e_1 + 4e_2 - 3e_3$ mittels dieser Basis dar.
20. a,b,c seien linear unabhängige Vektoren. Untersuchen Sie, ob das Vektortripel a + 2b, b – a , c linear unabhängig sind.
21. Es ist die Zahl λ so zu bestimmen, daß der Vektor a = (2, λ, -2) mit den Vektoren b = (-1, 4, 2) und c = (2, 5, 6) in einer Ebene liegt .

22. Zeigen Sie, daß ein beliebiger Vektor a und der Nullvektor stets linear abhängig sind.

23. Untersuchen Sie folgende Vektoren auf Lineare Abhängigkeit: a=(3,-1,2); b=(2,0,1) ; c=(5,-3,4).

24. Die Gerade g sei aus $\mathbf{R}^2$. Gesucht ist die Parameterdarstellung bzw. parameterfreie Form von g , falls
   a) g ist die x- Achse b) g ist die y-Achse
   c)g geht durch den Ursprung und bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel α mit $\tan \alpha = 2/5$
   d) g ist zur Geraden $2x - y = 3$ parallel und geht durch den Punkt P(1,-3).
   e) $g \in \mathbf{R}^3$: g geht durch den Schnittpunkt S der Geraden g*: r* = (5,-2,1)+λ(-1,7,4)mit der y,z-Ebene und verläuft parallel zur z-Achse.

25. Auf der Geraden g mit der Parameterdarstellung g: r = (-16,-5,8) + t (12,3,-4) Ist von ihrem Schnittpunkt P mit der Ebene z = 0 aus nach beiden Seiten die Strecke 13 abgetragen. Die Endpunkte sind Q und R . Welchen Umfang hat das Dreieck OQR?

26. Bestimmen Sie die Gerade, die durch den Punkt P geht und auf den beiden Vektoren a und b senkrecht steht. In welchem Punkt durchstößt die Gerade die x,y-Ebene ?

27. Untersuchen Sie, ob sich die beiden Geraden r = (1,2,-1) + t (1,0,-3) und s = (2,-4,-1) + τ (-1,3; 1,5) schneiden .

28. Gegeben sind die Gerade g : r = (2,-3,1) + t (1,-1,2) und der Punkt P(4,3,-3). Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung derjenigen Geraden $g^{\oplus}$, die durch P geht und auf g senkrecht steht.

29. Man bestimme eine parameterfreie Gleichung der durch nachfolgende Bedingungen definierten Ebene E :
   a) P(1,-2,1)$\in$ E , $\overrightarrow{OP}$ ist senkrecht zu E gerichtet.
   b) P(2,1,-1) $\in$ E, die Schnittgerade g der Ebenen $2x + y - z = 3$ und $x + 2y + z = 2$ steht senkrecht auf E.
   c) P(1,-1,3) $\in$ E , E parallel zur Ebene $3x + y + z = 7$.

30. Es sei $r = r_0 + tb$ eine Parameterdarstellung einer Geraden g und P_1 ein Punkt außerhalb g. Geben sie eine Parameterdarstellung der durch P_1 und g definierten Ebene an.

31. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die durch die x-Achse und den Punkt P(2,4,-1) Bestimmten Ebene an.

32. Eine Ebene E mit der Gleichung $2x + 2y + Cz - D = 0$ enthält die beiden Punkte P(1,2,-3) und Q(3,-2,1); P,Q sind benachbarte Eckpunkte eines Quadrates, das in E liegt. Welche Koordinaten haben die beiden anderen Eckpunkte R , S ?