Prof. Dr. S. Neuber(em.)

Wissensbasis
zum 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der 1. Mittelsatz, auch Satz von Lagrange genannt, spielt bei vielen theoretischen Betrachtungen und praktischen Berechnungen, z.B. die numerische Berechnung eines Funktionswertes aus einem bekannten Nachbarwert, eine große Rolle.

Erster Mittelwertsatz

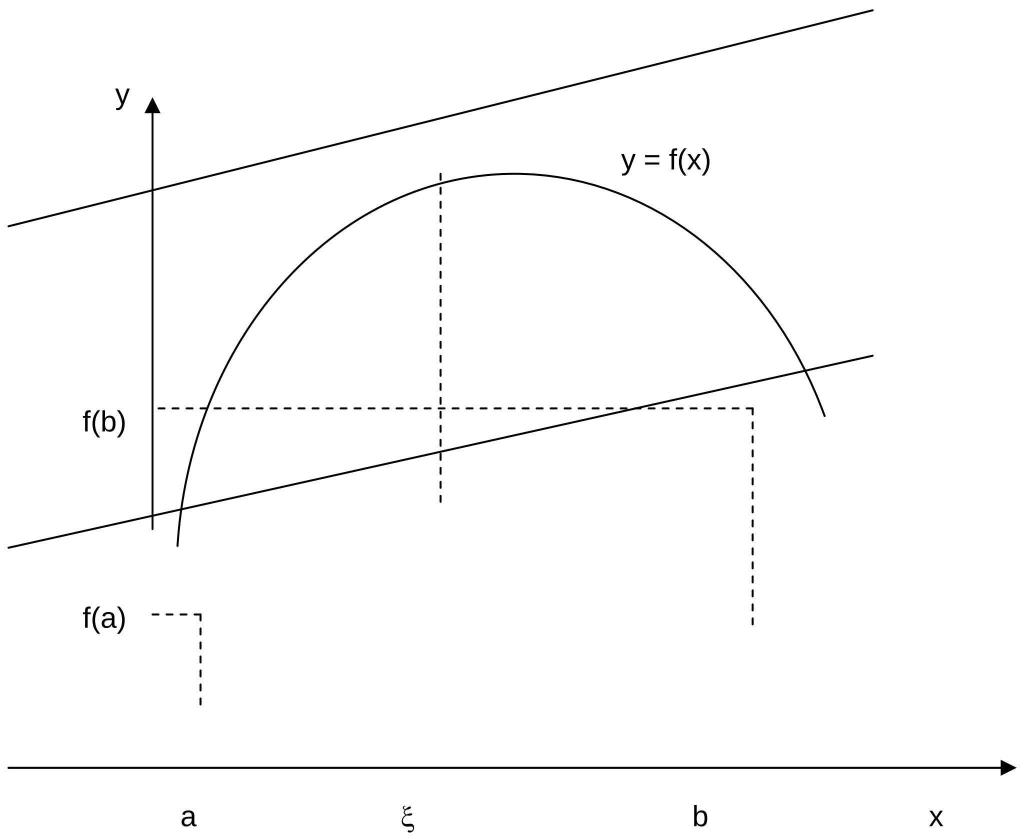
Ist eine Funktion f mit der Gleichung y= f(x) im Intervall [a, b] stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es im Innern des Intervalls mindestens einen Zwischenwert ξ (Mittelwert), für den die Gleichung gilt :

(1) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ mit $a<\xi<b$.

geometrische Interpolation (vgl. Abbildung) :

Der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt den Anstieg der Kurvensekante durch die Punkte (a; f(a)) und (b; f(b)) an. Es gibt mindestens eine Stelle ξ, für die die Tangente an die Kurve parallel zur Kurvensekante ist, d.h. beide haben desselben Anstieg, also $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

.



Andere Darstellungen der Gleichung (1) :

Setzt man a=x und b=x+h h≠0, so kann ξ in der Form $\xi=a+\nu h$: $(0<\nu<1)$ geschrieben werden. Dann folgen aus (1) die Gleichungen

(2) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\nu h)$ mit $0<\nu<1$;

(3) $\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{\Delta y} = h \cdot f'(x+\nu h)$,

$\Delta y = h \cdot f'(x+\nu h)$,

(4) $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\nu h)$.

Beispiel 1 :

Man berechne ξ für $y = f(x) = \ln x$; $x \in [1; e]$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln e-\ln 1}{e-1}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\xi}=\frac{1-0}{e-1}$$

$\Rightarrow \xi = e-1$

Beispiel 2 :

Es soll folgender Satz bewiesen werden :

Ist f(x) an jeder Stelle des Intervalls (a, b) differenzierbar und ist dort $f'(x)=0$ für

jedes x, so ist f(x) in [a, b] konstant.

Beweis : Sie a+h (h>0) eine beliebige Stelle des Intervalls [a, b], so erfüllt f(x) im Intervall (a, a+h) die Voraussetzung des Mittelwertsatzes. Folglich existiert ein ξ $(a<\xi<a+h)$, so dass :

$\Rightarrow$ $|\sin y - \sin x| \leq |y-x|$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(\xi).$$

Da nach Voraussetzung $f'(\xi)=0$,folgt $f(a+h) - f(a)=0$, daraus $f(a+h)=f(a)$;

also ist f(x) konstant im gesamten Intervall [a, b], da h beliebig.

Beispiel 3 :

Man beweise folgende Ungleichung :

$\forall x \in R$: $|\sin y - \sin x| \leq |y-x|$

Beweis : Mit x+h = y und Gleichung (2) folgt :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \text{ ; } f(x)=\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos \xi$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \right| = |\cos \xi| \leq 1$$

Aufgaben

zum 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\ln x$, $x \in [1; 3]$. Berechnen Sie den Mittelwert ξ.

Interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 2

Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $f(x)=x^2$, $x \in [a, b]$ an, d.h., bestimmen Sie ξ.

Welcher Wert von ν entspricht diesem ξ?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Stelle ξ, an der die Ableitung der Funktion $y=e^x$ mit dem zu Intervall $[x_0, x_0+h]$ gehörigen Differenzenquotienten dieser Funktion übereinstimmt. Berechne auch ν!

Aufgab 4

Zeigen Sie, dass $\forall x \in R$: $e^x > 1+x$!

Aufgabe 5

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ werden auch den Wert $-\frac{a}{2}$ voneinander getrennt, falls sie reell sind.

Prof. Dr. S. Neuber(em)

Kommentierte Lösungen

zum 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Aufgabe 1

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = (\ln\xi)' = \frac{1}{\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 3 - \ln 1}{3-1} = \frac{1}{\xi} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{2}{\ln 3}$$

Interpretation : Im Punkt P mit der Abszisse $\xi = \frac{2}{\ln 3}$ ist die Tangente an die Kurve y=ln x parallel zu Sehne durch die Punkte $P_1(1; 3)$ und $P_2(3; \ln 3)$.

Aufgabe 2

Die Voraussetzungen sind erfüllen, da $f(x)=x^2$ in R differenzierbar und $f'(x)=2x$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = 2\xi$$

$$\Rightarrow \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = 2\xi$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2}(a+b).$$

und ξ = a+νh = a+ν(b-a)

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} = a + \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - a = \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(b-a) = \nu(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3

„Differenzenquotient" ist nur ein Synonym für Austieg der Sekante ; f(x)=ex ist in R überall differenzierbar.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \left(e^x\right)_{x = x_0 + \nu \cdot h} \quad ; \; 0<\nu<1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0 + \nu \cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h}\left(e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}\right) = e^{x_0} \cdot e^{\nu \cdot h} \qquad | : e^{x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h}\left(e^h - 1\right) = e^{\nu \cdot h} \qquad | \ln$$

$$\Rightarrow \quad \ln e^{\nu \cdot h} = \ln \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \nu \cdot h \cdot \ln e = \ln \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{h} \cdot \ln \frac{e^h - 1}{h}$$

Aufgabe 4

Wir wählen $f(x)=e^x$ und $a=0$ und $b=x$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\left(e^x\right)'_{\nu_x}$$; $\xi = a+\nu(b-a) = 0+\nu x$

$$\Rightarrow \frac{e^x-e^0}{x}=e^{\nu_x}$$

$\Rightarrow$ $e^x-1 = xe^{\nu x}$

$x>0$: $e^{\nu x} >1$ | $\cdot x>0$

$xe^{\nu x} >x$, also

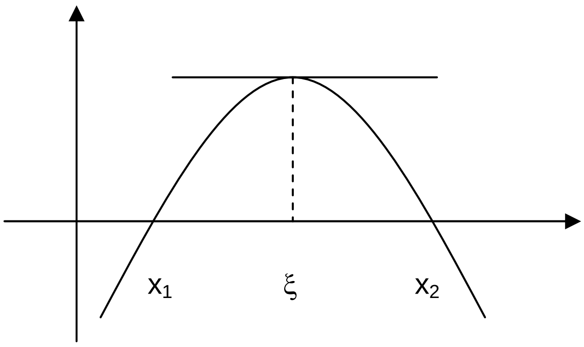
$e^x-1 = xe^{\nu x} >x$

$\Rightarrow$ $e^x >1+x$

$x<0$: $e^{\nu x} <1$ | $\cdot x<0$

$xe^{\nu x} >x$, woraus wiederum die Behauptung folgt.

Aufgabe 5



Sekante : P1(x1; 0) und P2(x2; 0)

a=x1 ; b=x2

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{0-0}{x_2-x_1}=\left(x^2+ax+b\right)'_{x=\xi}$$

$\Rightarrow$ $0 = 2\xi+a$

$$\Rightarrow \xi = -\frac{a}{2}$$