

Mathematische Vorbereitung zur (vollständigen) Induktion

Wenn in einem Lehrsatz eine natürliche Zahl auftritt, die nur der einen Bedingung unterworfen ist, nicht unterhalb eines gewissen Anfangswertes n_0 zu liegen, so kann man die Gültigkeit dieses Satzes häufig mit der Methode der (vollständigen) Induktion beweisen.

Es soll eine Aussage folgender Art bewiesen werden:

Für alle natürliche Zahlen $n \geq n_0$ gilt $p(n)$;

kurz: $\forall n \geq n_0 : p(n)$,

z.B. Für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \quad (\text{Gaußsche Summenformel}),$$

$$\text{kurz: } \forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Das Beweisprinzip besteht aus 2 Schritten:

1. Induktionsanfang

Man zeigt, dass $p(n_0)$ gilt.

2. Schluss von n auf $n+1$; kurz: $n \rightarrow n+1$

Für beliebiges $n \geq n_0$ setzt man die Gültigkeit von $p(n)$ voraus und schließt auf die Gültigkeit von $p(n+1)$, d.h. , man beweist die Aussage

$$\forall n \geq n_0 : p(n) \Rightarrow p(n+1)$$

$$\text{Beispiel: } \forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

1. Induktionsanfang

$$p(n_0=1) : \sum_{k=1}^1 k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

2. $n \rightarrow n+1$

$$\text{zu zeigen: } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $p(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned} p(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1) \\ &= (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n + 1 \right) \\ &= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (n+2) \end{aligned}$$

Aufgaben

Beweisen Sie folgende Aussagen:

Aufgabe 1:

$$\forall n \geq 1: \sum_{k=1}^n (2 \cdot k - 1) = n^2$$

Aufgabe 2:

$$\forall n \geq 1: \sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$$

Aufgabe 3:

$$\forall n \geq 0: (1+a)^n \geq 1+n \cdot a; \quad a > -1 \text{ fest gew\u00e4hlt}$$

(Bernoullische Ungleichung)

Aufgabe 5:

Die Zahl der Permutationen (Anordnungen) von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n = n!$ aller nat\u00fcrlichen Zahlen von 1 bis n .

Aufgabe 7:

F\u00fcr einen beliebigen reellen Wert x_0 gelte $0 < x_0 < 1$. Eine Folge (x_n) sei durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n); \quad n=0,1,2,\dots$$

Zeigen Sie, dass die Glieder der Folge unterhalb der Zahl 1 bleiben.

Kommentierte Lösungen

Aufgabe 1:

1. Induktionsanfang

$$n=1: \quad \sum_{k=1}^1 (2 \cdot k - 1) = 1^2$$
$$1=1$$

2. $n \rightarrow n+1$

zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n (2 \cdot k - 1) = n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} (2 \cdot k - 1) = (n+1)^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2 \cdot k - 1) &= 1 + 3 + 5 + \dots + 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot (n+1) - 1 \\ &= \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 2 \cdot n - 1}_{\text{nach Voraussetzung}} + 2 \cdot n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Wir benutzen bei der Rechnung das Eulersymbol (Binomialkoeffizient)

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\text{z.B. } \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2!} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2!} = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Beweis:

1. Induktionsanfang

$$n=1: \sum_{k=1}^1 k^3 = \binom{1+1}{2}^2$$
$$1^3 = \binom{2}{2}^2 = \left(\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}\right)^2 = 1$$

2. $n \rightarrow n+1$

zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \binom{n+2}{2}^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{\binom{n+2}{2}^2} + (n+1)^3 \\ &= \binom{n+2}{2}^2 + (n+1)^3 \\ &= \binom{n+2}{2}^2 + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4 \cdot (n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4 \cdot n + 4)}{4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \\ &= \binom{n+2}{2}^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

$$1. n=0: \quad 2^0 > 0 \\ 1 > 0$$

$$2. n \rightarrow n+1 \\ \text{zu zeigen:}$$

$$2^n > n \Rightarrow 2^{n+1} > n+1$$

Beweis:

Da nach Voraussetzung $2^n > n$, aber auch gleichzeitig $2^n \geq 1$,
so folgt durch Addition beider Ungleichungen:

$$2^n + 2^n > n + 1$$

$$2 \cdot 2^n > n + 1$$

$$2^{n+1} > n + 1$$

Aufgabe 4:

$$1. n=0: \quad (1+a)^0 \geq 1+0 \cdot a \\ 1 > 1$$

$$2. n \rightarrow n+1 \\ \text{zu zeigen:}$$

$$(1+a)^n \geq 1+n \cdot a \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot a$$

Nach Voraussetzung ist

$$(1+a)^n \geq 1+n \cdot a \quad \left| \cdot (1+a) \geq 0 \right.$$

$$(1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+n \cdot a) \cdot (1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+n \cdot a+n \cdot a^2 \\ \geq 1+(n+1) \cdot a+n \cdot a^2 \\ \geq 1+(n+1) \cdot a$$

Aufgabe 5:

1. Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n=1$ und $n=2$.

$$2. n \rightarrow n+1$$

zu zeigen:

Wenn die Anzahl der Permutationen für n verschiedene Elemente gleich $n!$ ist,
so ist die Anzahl der Permutationen für $(n+1)$ $(n+1)!$.

Beweis:

Denken wir uns eines der $(n+1)$ Elemente festgehalten, so gibt es für die
restlichen Elemente nach Voraussetzung $n!$ Permutationen. Setzt man das
Verfahren für alle $(n+1)$ Elemente fort, so ergeben sich $(n+1) \cdot n!$ Permutationen;
das ist aber $(n+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = (n+1)!$

Aufgabe 6:

1. $n=0$: $0 < x_{n+1} < 1$ (laut Aufgabenstellung erfüllt)

2. $n \rightarrow n+1$

zu zeigen:

$$0 < x_n < 1 \Rightarrow 0 < x_{n+1} < 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n \cdot (2 - x_n) \\ &= 2 \cdot x_n - x_n^2\end{aligned}$$

Da $x_n > 1$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_n < 2 \quad (1)$$

und $x_n^2 < 1 \quad (2)$

Durch Subtraktion (1) - (2):

$$\Rightarrow \underbrace{2 \cdot x_n - x_n^2}_{x_{n+1}} < 2 - 1 = 1 > 1$$