Prof. Dr. S. Neuber
FB 4 / WM

Wissensbasis zum Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen in R und in C

Die Menge R der reellen Zahlen sowie die Menge C der komplexen Zahlen bilden die Grundlage des Rechnens in der Mathematik (Analysis). Deshalb sollen die wichtigen Grundgesetze (Axiome) vorgestellt werden.

1. Die reellen Zahlen

   Grundlage für das Rechnen mit Ungleichungen sind die Axiome der Anordnung.

   (1) Zu zwei reellen Zahlen x, y besteht genau eine der drei Beziehungen:

   $x<y, \; x=y, \; x>y$

   $x \leq y := x<y \wedge x=y$

   (2) $\forall x,y,z \in R : x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$ (Transitivität)

   (3) $\forall x,y,z \in R : x<y \Rightarrow x+z < y+z$ (Monotonie der Addition)

   (4) $\forall x,y,z \in R : x<y \wedge z>0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (Monotonie der Multiplikation)

   Daraus folgen die Rechenregeln:

   $\forall x,y,z,v \in R$:

   (5) $x<y \wedge z<0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$

   (6) $x<y \wedge z<v \Rightarrow x+z < y+v$

   (7) $x<y \wedge z<v \wedge y,z > 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot v$

   (8) $x<y \wedge x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

   Definition: Sei $x \in R$.

   $$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x<0 \end{cases}$$

   Die Zahl $|x|$ heißt absoluter Betrag von x.

   Geometrische Interpretation:

   $|x|$ ist der Abstand Der Zahl x vom Nullpunkt.

   $|x-y|$ ist der Abstand der Zahlen x,y.

   $\forall x, \varepsilon, x_0 \in R$ und $\varepsilon > 0 \wedge x_0$ fest

   (9) $|x| \geq 0$; $|-x|=|x|$; $x \leq |x|$

   (10) $|x|=\varepsilon \Leftrightarrow x=+\varepsilon \wedge x=-\varepsilon$

   (11) $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon$

   (12) $|x-x_0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x_0-\varepsilon \leq x \leq x_0+\varepsilon$

   (12a) $|x-x_0| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \geq x_0+\varepsilon \vee x \leq x_0-\varepsilon$

   (13) $-|x| \leq x \leq |x|$

   (14) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

   (15) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

(16) $|x^n|=|x|^n$; $n\in N$
(17) $|x+y| \le |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung)
(18) $\forall\ n\in N,\ \forall\ x\in R$:
$n\geq 2 \wedge x>-1 \wedge x\neq 0 \Rightarrow (1+x)^n > 1+n\cdot x$ (Bernoullische Ungleichung)

2. Komplexe Zahlen

Mit der Definitionsgleichung $i^2 = -1$ besitzt eine komplexe Zahl $z = (x,y) \in R\times R$ die Form :
$z = x+i\cdot y$ (arithmetische Form),
$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ (trigonometrische Form), unter Beachtung der
Euler – Relation $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$
$z = r\cdot e^{i\varphi}$ (Exponentialform)
wobei $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ (abs. Betrag) und $\varphi = \arg z$ mit $-\pi<\varphi\leq\pi$.Rechnerisch kann man φ aus $\tan\varphi = \frac{y}{x}$; $x\neq 0$ und unter Beachtung der Lage von z in der Gaußschen Zahlenebene eindeutig bestimmen.
Man nennt x auch den Realteil von z bzw. y den Imaginärteil von z, in Zeichen
$x = Re(z)$ bzw. $y = Im(z)$.
Sei $z = x+i\cdot y$ und $w = u+i\cdot v$. Dann gilt:

(19) $z\pm w = (x\pm u)+(y\pm v)\cdot i$
(20) $z\cdot w = (x\cdot u - y\cdot v)+(x\cdot v + y\cdot u)\cdot i$
(21) $\frac{z}{w} = \frac{x\cdot u+y\cdot v}{u^2+v^2} + \frac{y\cdot u-x\cdot v}{u^2+v^2}\cdot i$ (Konjugiert-komplex erweitern)
(22) $z\cdot w = r_z\cdot r_w\cdot e^{i(\varphi_z+\varphi_w)}$
(23) $\frac{z}{w} = \frac{r_z}{r_w}\cdot e^{i(\varphi_z+\varphi_w)}$
(24) $|e^{i\varphi}| = 1$
(25) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$
(26) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
(27) $|z+w| \le |z|+|w|$ (Dreiecksungleichung)
(28) $|z| = \varepsilon$ ist die Menge aller komplexer Zahlen, die vom Nullpunkt den Abstand ε haben, also alle Punkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M(0;0) und Radius $r = \varepsilon$, da

$$|z| = \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \varepsilon^2 \quad \text{(Kreisgleichung)}$$

(29) $|z-z_0| = \varepsilon$ stellt somit die Menge aller z dar, die von z_0 den Abstand ε haben, also ein Kreis mit $M(x_0,y_0)$ und dem Radius $R = \varepsilon$.

$$|z-z_0| = \varepsilon \Leftrightarrow |x+i\cdot y-(x_0+i\cdot y_0)| = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |(x-x_0)+i\cdot(y-y_0)| = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = \varepsilon^2 \quad \text{(allg. Kreisgleichung)}$$

Prof. Dr. S. Neuber
FB 4 / WM

Aufgaben zum Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen in R und in C

Aufgabe 1 :
Berechnen Sie die Menge L (Lösungsmenge) aller $x \in R$, für die gilt:

a) $\frac{2 \cdot x + 1}{x - 1} < 1$

b) $|x - 4| < 6$

c) $|1 + x| \geq 4$

d) $|\frac{3}{2}x - 2| = \frac{5}{2}$

e) $\left|\frac{x - 3}{2 \cdot x + 4}\right| < 1$

f) $\frac{|1 + 2 \cdot x|}{1 - x} \leq 1$; $x \neq 1$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Lösungsmenge L aller $(x, y) \in R^2$, für die gilt:

a) $(x-1)^2 \cdot (y+5) > 0$

b) $|x \cdot y| = 1$

c) $|x|+|y| \leq 1$

d) $y \geq 2 - x^2$ und $x^2 + (y-2)^2 = 4$

Skizzieren Sie L!

Aufgabe 3:
Welche Punktmenge M werden durch folgende Bedingungen beschrieben?

a) $|z| \leq 1$

b) $|z-1| = 2$

c) $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$

d) $0 < \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}(z) < |z|$

e) $|z + 4 \cdot i - 3| = 3$

f) $|z| + \mathrm{Re}(z) = 1$

g) $\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 1$

h) $0 < a < |z| \leq b$

i) $|z-2| + |z+2| = 4$

Aufgabe 4:
Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\forall z : |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ bzw. $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

b) $\forall z_1, z_2 : |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Prof. Dr. S. Neuber
FB 4 \ WM

Kommentierte Lösungen zum Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen in R und in C

Aufgabe 1a)

$\frac{2 \cdot x+1}{x-1} < 1$; $x \neq 1$

1. Fall : $x - 1 > 0$ | +1 $\Rightarrow$ $x>1$ (Regel (3))

$\frac{2 \cdot x+1}{x-1} < 1$ | $\cdot$ (x - 1)>0 (Regel (4))

$\Leftrightarrow$ $2 \cdot x + 1 < x - 1$ | -x | -1 (Regel (3))

$\Leftrightarrow$ $x + 1 < -1$ $\Rightarrow$ Widerspruch zu $x>1$

$\Rightarrow$ $L_1 = \emptyset$

2. Fall : $x - 1 < 0$ $\Rightarrow$ $x < 1$ ($\ast$)

$\frac{2 \cdot x+1}{x-1} < 1$ | $\cdot$ (x - 1) < 0 (Regel (5))

$\Leftrightarrow$ $2 \cdot x + 1 > x - 1$

$\Leftrightarrow$ $L_2 = (-2;1)$

$\Leftrightarrow$ $L = L_1 \cup L_2 = \emptyset \cup (-2;1) = (-2;1)$

Aufgabe 1b)

Mit WB (12) folgt $x_0 = 4$ und $\varepsilon = 6$ folgt : $|x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 6 < x < 4 + 6$

$\Leftrightarrow -2 < x < 10$

$\Rightarrow L = (-2;10)$

Aufgabe 1c)

Ebenfalls mit WB (12a) :

$|1 + x| \geq 4 \Leftrightarrow |x - (-1)| \geq 4$

$\Leftrightarrow x \;\; -1 + 4 = 3$

$\Leftrightarrow x \leq -1 - 5 = -5$

$\Rightarrow L = R \setminus (-5;+3)$

Aufgabe 1d)

Mit WB (10) folgt : $-\frac{3}{2} \cdot x - 2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

$\frac{3}{2} \cdot x - 2 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 1e)

$$\left|\frac{x-3}{2 \cdot x+4}\right| < 1 \quad \overset{\text{WB (15)}}{\Rightarrow} \quad \frac{|x-3|}{|2 \cdot x+4|} < 1$$

$\Rightarrow |x - 3| < |2 \cdot x + 4|$

Prof. Dr. S. Neuber
FB 4 \ WM

Kommentierte Lösungen zum Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen in R und in C

Aufgabe 1a)

$$\frac{2 \cdot x+1}{x-1} < 1 \; ; \; x \neq 1$$

1. Fall : $x - 1 > 0 \mid +1 \Rightarrow x>1$ (Regel (3))

$\frac{2 \cdot x+1}{x-1} < 1 \mid \cdot (x - 1)>0$ (Regel (4))

$\Leftrightarrow 2 \cdot x + 1 < x - 1 \mid -x \quad \mid -1$ (Regel (3))

$\Leftrightarrow x + 1 < -1 \Rightarrow$ Widerspruch zu $x>1$

$\Rightarrow L_1 = \varnothing$

2. Fall : $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$ ($\ast$)

$\frac{2 \cdot x+1}{x-1} < 1 \mid \cdot (x - 1) < 0$ (Regel (5))

$\Leftrightarrow 2 \cdot x + 1 > x - 1$

$\Leftrightarrow L_2 = (-2;1)$

$\Leftrightarrow L = L_1 \cup L_2 = \varnothing \cup (-2;1) = (-2;1)$

Aufgabe 1b)

Mit WB (12) folgt $x_0 = 4$ und $\varepsilon = 6$ folgt : $|x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 6 < x < 4 + 6$

$\Leftrightarrow -2 < x < 10$

$\Rightarrow L = (-2;10)$

Aufgabe 1c)

Ebenfalls mit WB (12a) :

$|1 + x| \geq 4 \Leftrightarrow |x - (-1)| \geq 4$

$\Leftrightarrow x \; -1 + 4 = 3$

$\Leftrightarrow x \leq -1 - 5 = -5$

$\Rightarrow L = R \setminus (-5;+3)$

Aufgabe 1d)

Mit WB (10) folgt : $-\frac{3}{2} \cdot x - 2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

$\frac{3}{2} \cdot x - 2 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 1e)

$$\left|\frac{x-3}{2 \cdot x+4}\right| < 1 \overset{\text{WB (15)}}{\Rightarrow} \frac{|x-3|}{|2 \cdot x+4|} < 1$$

$\Rightarrow |x - 3| < |2 \cdot x + 4|$

Da die Beträge ≥ 0 kann man mit Erfolg die Aussage $\forall\ a,b \geq 0 : a<b \Rightarrow a^2<b^2$ anwenden.

$\Leftrightarrow\ |x - 3|^2 < |\,2 \cdot x + 4|^2$

$\Leftrightarrow\ (x - 3)^2 < (2 \cdot x + 4)^2$, da $|x|^2 = x^2$

$\Leftrightarrow\ x^2 - 6 \cdot x + 9 < 4 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 16$

$\Leftrightarrow\ 0 < 3 \cdot x^2 + 22 \cdot x + 7$

$\Leftrightarrow\ 0 < x^2 + \frac{22}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$ (∗∗)

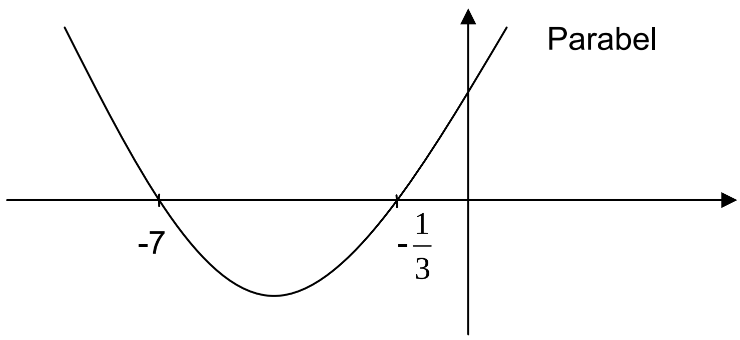
Man betrachtet die Gleichung $x^2 + \frac{22}{3} \cdot x + \frac{7}{3} = 0$ (∗) und benutzt die quadratische Ergänzung :

$$\underbrace{\left(x+\frac{11}{3}\right)^2 - \frac{121}{9}}_{x^2 + \frac{22}{3} \cdot x} + \frac{7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$$\Leftrightarrow |x + \frac{11}{3}| = \frac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{11}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ x + \frac{11}{3} = -\frac{10}{3} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

Das sind die Nullstellen der Gleichung (∗) :



Ungleichung (∗∗) meint aber alle x für die $y(x) > 0 \Rightarrow x < -7 \vee x > -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow L = R \setminus \left[-7; -\frac{1}{3}\right]$$

Aufgabe 1f)

$$\frac{|1+2\cdot x|}{1-x} \leq 1$$

1. Fall : $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$\frac{|1+2\cdot x|}{1-x} \leq 1 \quad | \ (1 - x) > 0 \quad \text{WB (4)}$$

$$|1 + 2 \cdot x| \leq 1 - x$$

Da beide Seiten der Ungleichung < 0, kann man so quadrieren :

$(1 + 2 \cdot x)^2 \le (1 - x)^2$
$\Rightarrow 1 + 4 \cdot x + 4 \cdot x^2 \le 1 - 2 \cdot x + x^2$
$\Leftrightarrow 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x \le 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \le 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 \le 0$
$\Leftrightarrow |x + 1|^2 \le 1$
$\Leftrightarrow -2 \le x \le 0$ (WB (12) : $x_0 = -1$; $\varepsilon = 1$)
Unter Beachtung der Vorsetzung $x < 1$, folgt als Teillösung $L_1 = [-2;0]$.

2. Fall : $1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\frac{|1 + 2 \cdot x|}{1 - x} \le 1$ | $(1 - x) < 0$ WB (4)

$|1 + 2 \cdot x| \ge 1 - x$

Da die linke Seite der Ungleichung nicht – negativ und die rechte Seite der Ungleichung negativ, lässt sich das Quadrieren der Gleichung nicht anwenden, sondern muss für den Term $|1 + 2 \cdot x|$ eine Fallunterscheidung durchführen.

(α) $1 + 2 \cdot x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 + 2 \cdot x \ge 1 - x$
$3 \cdot x \ge 0$
$x \ge 0$ und $x > 1$ und $x \ge -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow L_{21} = (1;+\infty)$

(β) $1 + 2 \cdot x < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ steht im Widerspruch zu $x>1$
$\Rightarrow L_{22} = \varnothing$

Damit ergibt sich als Lösungsmenge

$L = L_1 \cup L_{21} \cup L_{22}$
$= L_1 \cup L_{21}$
$= [-2;0] \cup (1;+\infty)$

Aufgabe 2a)

$(x - 1)^2 \cdot (y + 5) > 0$
Da $(x - 1)^2$ stets ≥ 0 muss auch $y + 5 > 0$ sein.

Da das Produkt positiv sein soll, folgt

$(x - 1)^2 > 0 \wedge y + 5 > 0 \Rightarrow |x - 1| > 0 \wedge y + 5 > 0$
$\Rightarrow x \ne 1 \wedge y > -5$

Skizze vgl. Lösungen!

Aufgabe 2b)

$|x \cdot y| = 1 \Rightarrow$ WB (14) $|x| \cdot |y| = 1$

$\Rightarrow |y| = \frac{1}{|x|}$; $x \ne 0$

$\Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{|x|}$

$= \pm \frac{1}{x}$ (Def. d. Betrages)

Skizze vgl. Lösungen!

Aufgabe 2c)

$|x| + |y| \leq 1 \;\Rightarrow\; |y| \leq 1 - |x|$

$\Rightarrow y \geq 0 :\; y \leq 1 - |x|$

$y < 0 :\; -y \leq 1 - |x|$

$y \geq |x| - 1$

Skizze vgl. Lösungen!

Aufgabe 2d)

$y \geq 2 - x^2 \wedge x^2 + (y - 2)^2 = 4$

$y = -x^2 + 2$ ist die Parabel

Die allgemeine Kreisgleichung lautet :

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Dann ist obige Gleichung ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(x ;y) = M(0;2) und Radius r=2.

Beide Bedingungen werden von allen Punkten P(x, y) gefüllt, die auf dem Kreis liegen, mit Ausnahme der Punkte des Kreises, die auf dem Kreisbogen P_1P_2 liegen.

Vergleichen Sie die Skizze in Lösungen!

Aufgabe 3

a) M ist die Menge aller Punkten innerhalb und auf dem Rande des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ (vgl. WB (28)).
b) M ist die Menge aller Punkte auf dem Rande des Kreises $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; $x_0=1$; $y_0=0$; (vgl. WB (29)).
c) Es ist φ = arg z ; d.h. $|\arg z| = |\varphi| < \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt mit $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$; r beliebig; dass M die Menge aller z ist, die im I und IV Quadranten liegen.

d) Sei z = x +iy.

Dann ist Im(z) = y und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$0 < \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}(z) < |z| \;\Rightarrow\; 0 < \sqrt{2} \cdot y < \sqrt{x^2 + y^2} \quad | \uparrow 2$

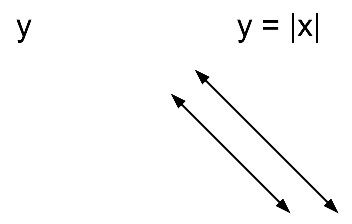
$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot y^2 < x^2 + y^2$

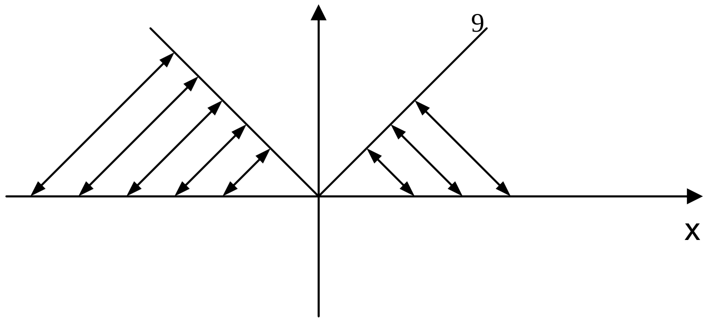
$\Leftrightarrow y^2 < x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow |y| < |x| \quad (*)$

Aus $\sqrt{2} \cdot y > 0$ folgt y > 0 und somit ergibt sich aus (∗) y< |x| ;
also ist $M = \{z = (x,y) \mid y > 0 \wedge y < |x| \}$

Skizze :





e) $|z + 4i - 3| \Rightarrow |z - (3 - 4i)| = 3$

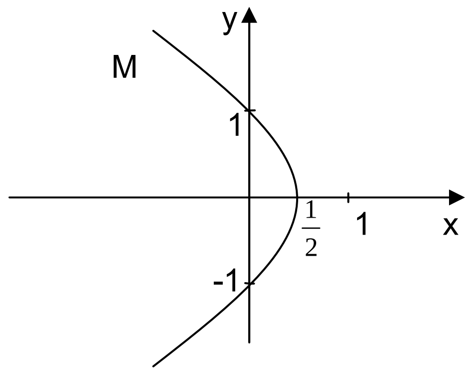
$\Rightarrow$ mit $|z - z_0| = \varepsilon$ (vgl. WB (29))

$z_0 = 3 - 4i = (3;-4) \wedge \varepsilon = 3$

Also ist M die Menge aller Punkte auf dem Rande des Kreises

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

f) $|z| + \mathrm{Re}(z) = 1$ mit $z = x + iy$.



$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - x \quad | \uparrow 2;\ (1 - x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2 \cdot x + x^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 - 2 \cdot x$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - 2x};\ 1 - 2 \cdot x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

g) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1 \quad | \cdot (z \cdot \bar{z})$

$\Leftrightarrow \bar{z} + z = z \cdot \bar{z};\ z = x + iy:\ z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 2 \cdot x = x^2 + y^2$ (quadratische Ergänzung)

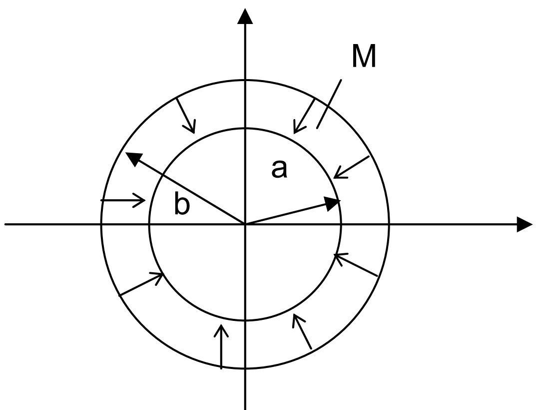
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ M ist die Menge aller Punkte auf dem Rande des Kreises mit $x_0=1$; $y_0=0$ und r=1.

h) $|z|>a$ sind alle z außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $M_0(0;0)$ und dem Radius r=a; $|z| \leq b$ sind alle z der Kreisscheibe (Inneres und Rand) mit M(0;0) und r=b>a. Also ist die gesuchte Punktmenge M die Menge aller z eines Kreisringgebiets.

Skizze



i) $|z - 2| + |z + 2| = 4$

$\Leftrightarrow |x + iy - 2| + |x + iy + 2| = 4$

$\Leftrightarrow |(x - 2) + iy| + |(x + 2) + iy| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}$ + $\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ = 4

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}$ = 4 - $\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ (∗)

Beachte: Die Quadratur eine Gleichung ist nicht in jedem Falle eine äquivalente Umformung; und zwar ist hier in (∗) die linke Seite der Gleichung stets nicht-negativ (Wurzeldefinition), aber die rechte Seite kann durchaus negativ werden. Aus a=b folgt zwar $a^2=b^2$, jedoch nicht umgekehrt; z.B. $(-1)^2=(1)^2$ daraus folgt nicht –1=+1!

Quinteszenz: Es geht mit einem Implikationspfeil weiter und die sich am Schluss ergebende Lösung muss an der Ausgangsgleichung überprüft werden.

(∗) $\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 16 - 8 \cdot \sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 8 \cdot \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8 \cdot (x+2)$

$\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow y = 0$

$\Leftrightarrow |y| = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$

Wir haben gefunden, dass alle Punkte z = x + iy die Ausgangsleitung erfühlen, falls y=0, also alle Punkte z=x.

Um umgekehrt zu prüfen, ob alle Punkte z=x die Ausgangsleitung erfühlen, oder ob zusätzliche Bedingungen gefordert werden müssen, setzen wir z=x in die Ausgangsgleichung ein :

$|x-2| + |x+2| = 4$

1. Fall. $x < -2$: $|x-2| + |x+2| = -(x-2) - (x+2) = -2x > 4$

2. Fall. $-2 \le x \le +2$: $|x-2| + |x+2| = -(x-2) + (x+2) = 4$

3. Fall. $x > 2$: $|x-2| + |x+2| = (x-2) + (x+2) = 2x > 4$

Nur Fall 2 trifft zu, also ergibt sich letztendlich als Punktmenge $M = \{z=(x,y) \mid y=0 \wedge -2 \le x \le +2\}$; d.h. alle Punkte längs der strecke von –2 bis +2 auf der x-Achse.

Aufgabe 4

a) Zu zeigen : $\forall z \in C : |Re(z)| \le |z| : z = x + iy$

$\Leftrightarrow |x| \le \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow |x| \le x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 \le x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 0 \le y^2$, was stets richtig ist ;

analog beweist man $|Im(z)| \le |z|$

b) $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$ (man addiert 0 = -z + z)

$= |(z_1 - z_2) + z_2|$ (Anwenden der Dreiecksungleichung WB (26))

$\le |z_1 - z_2| + |z_2|$

$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

c) nach b) gilt : $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ und $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \ge |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$ Fasst man beide Aussagen zusammen, so folgt die Behauptung.

d) Dreiecksungleichung :

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2| \le |z_1 + (-z_2)|$

$\le |z_1| + |-z_2|$

$= |z_1| + |z_2|$