1 Grundlagen

Nun soll auf die Redeweisen „Für alle ...“, „Es gibt ein ...“ usw. eingegangen werden.

> Die Aussage $p = \forall x \in \mathcal{I} : p(x)$ (lies: "Für alle x aus $\mathcal{I}$ gilt $p(x)$“ bzw. „Für alle x aus $\mathcal{I}$ gilt: x hat die Eigenschaft p“) besitzt nur dann den Wahrheitswert W, wenn $p(x)$ für alle x eines bestimmten Bereichs (Menge) $\mathcal{I}$ eine wahre Aussage darstellt. Das Symbol $\forall$ heißt **Allquantor**.

Die Bezeichnung des Grundbereichs (Menge) $\mathcal{I}$ kann auch entfallen, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind: $p = \forall x : p(x)$.

Neben der Möglichkeit, eine Aussageform $p(x)$ durch Belegen der Variablen x aus einem Bereich $\mathcal{I}$ in eine Aussage zu überführen, wird nunmehr durch die sogenannte **Bindung** der Variablen x mit dem Allquantor aus der Aussageform $p(x)$ eine Aussage p. Der Vorgang läßt sich auf mehrere Variable erweitern: Aus der Aussageform $p(x, y)$ wird durch Bindung der Variablen x, y die Aussage $p = \forall x \in \mathcal{I} \forall y \in \mathcal{I} : p(x, y)$, auch kürzer $p = \forall x, y \in \mathcal{I} : p(x, y)$.

Beispiele

1. p_1 =„Für alle reellen Zahlen x gilt: $\sqrt{x^2} = |x|$“ , kurz: $p_1 = \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$.
   Die Aussage ist wahr, denn jede reelle Zahl x hat die Eigenschaft, die Gleichung zu erfüllen.

2. p_2 = „Für alle Primzahlen gilt, dass sie ungerade sind“, oder „Alle Primzahlen sind ungerade“. Doch die Zahl 2 gehört auch zu den Primzahlen, ist aber nicht ungerade, also trifft die Eigenschaft *x ist ungerade* nicht auf alle Primzahlen zu, d.h. $w(p_2)$ =F.

3. $p_3 = \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ist wahr, da das Quadrat jeder reelen Zahl Null oder positiv (nicht - negativ) ist.

4. Die Aussage p_4 = „Für alle reellen Zahlen x, y gilt: $(x+y)^2 = x^2+y^2$ bzw. $p_4 = \forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + y^2$ ist falsch. Natürlich existieren Zahlen x, y - etwa $x = y = 0$ - für die diese Gleichung gilt, aber eben nicht für alle reellen Zahlen.

Gleichbedeutend mit der Redeweise „Für alle x ...“ sind die Ausdrucksweisen „Für jedes x ...“, „Für beliebiges x ...“ . Die Aussageform $q(x, y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2$ kann natürlich auch durch Bindung mit einem anderen Quantor in eine wahre Aussage überführt werden.

> Die Aussage $q = \exists x \in \mathcal{I} : q(x)$ (lies: „Es existiert (gibt) ein x aus $\mathcal{I}$ so, dass $q(x)$ gilt“) besitzt nur dann den Wahrheitswert W, falls

$q(x)$ für *mindestens* ein x aus $\mathcal{I}$ eine wahre Aussage darstellt. Das Symbol $\exists$ heißt **Existenzquantor**.

Daraus geht hervor, dass die Redeweise "Ès gibt ein …" im Gegensatz zur Umgangssprache steht, denn in mathematischen Texten ist immer „Es gibt *mindestens* ein…" gemeint. Man muss als Anfänger das Wörtchen „mindestens" gedanklich hinzufügen.

Existiert nur ein einziges Element x aus $\mathcal{I}$ auf das eine wohldefinierte Eigenschaft zutrifft, so sagt man „Es gibt *genau ein*…" bzw. „Es gibt ein und nur ein …". Für diesen Fall benutzt man das Symbol $\exists!$, etwa $\exists! x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0$.
Der Existenzquantor kann ebenfalls mehrfach auftreten : $\exists x \exists y \exists z : p(x, y, z)$.

Beispiele

1. q_1 =„Es gibt eine gerade Primzahl", $w(q_1)$ =W.
   Da es nur ein einziges Element mit dieser Eigenschaft aus der Menge der Primzahlen gibt, kann man die Aussage verschärfen zu „Es gibt genau eine gerade Primzahl".

2. q_2 = „Es gibt eine reelle Zahl x so, dass gilt: $x^2 = 1$",
   kurz: $q_2 = \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$, $w(q_2)$ =W , denn es gibt mindestens ein reelles Element x (z.B. $x = 1$) mit dieser Eigenschaft.

3. Die Aussage $q_3 = \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ist sicher falsch, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist Null oder positiv.

4. $q_4 = \exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x+y = 0$, $w(q_4)$ =W, weil beispielsweise $1+(-1) = 0$, während $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ falsch ist, etwa $1 + (-2) \neq 0$.

Will man zum Ausdruck bringen, dass es nicht mehr als ein Element aus $\mathcal{I}$ gibt, auf das eine bestimmte Eigenschaft zutrifft, so benutzt man die Redeweise „Es gibt höchstens ein …"; sie ist äquivalent mit „Es gibt genau ein oder kein Element …". Zum Beispiel ist die Aussage „Zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_1 der Ebene haben höchstens einen Punkt gemeinsam" eine wahre Aussage, denn entweder haben sie keinen gemeinsamen Schnittpunkt – die Geraden verlaufen parallel – oder sie haben genau einen Schnittpunkt miteinander.

Im Zusammenhang mit der Redeweise „genau ein" wollen wir noch auf den Gebrauch bestimmter Artikel hinweisen. Es macht Sinn, von *der* geraden Primzahl bzw. von *der* Lösung der Gleichung $2x = 1$ zu sprechen, weil es jeweils nur genau ein Element mit der geforderten Eigenschaft gibt. Dagegen macht es keinen Sinn, von *der* Nullstelle der Funktion $f(x) = x^5 - 1$, $x \in \mathbb{C}$ zu reden, da es nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau 5 Nullstellen im Bereich $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen gibt.

Der Allquantor und der Existenzquantor können in mathematischen Texten häufig gemischt auftreten, z.B. $\exists x \forall y$ (lies: „Es gibt ein x, sodass für alle y gilt") oder $\forall x \exists y$ (lies: „Für alle x existiert ein y, so dass gilt"). Die zu einem Quantorsymbol gehörige Variable nennt man *gebundene Variable.* Sie spielt eine ähnliche Rolle wie die Integrationsvariable in der Integralrechnung; die übrigen

Variablen heißen *freie Variable.*

Beispiele

1. Der Grundbereich sei $\mathbb{R}$.
   Die Aussage $\forall x \exists y : x + y = 0$ ist wahr, denn sie behauptet, dass zu jeder reellen Zahl x mindestens eine reelle y existiert, und zwar derart, dass $x + y = 0$, nämlich $x + (-x) = 0$.

2. Aber! $\exists x \forall y : x + y = 0$ ist nicht möglich, da es zu einem x nicht beliebig viele y gibt, die die Eigenschaft $x + y = 0$ erfüllen. Beachten Sie: Die Quantoren sind nicht einfach vertauschbar!

3. Eine Menge $\mathcal{A}$ wird u.a. durch eine Aussagenform $p(x)$ beschrieben, und zwar derart:

   $$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{I} | w(p(x)) = \mathrm{W}\}, \text{ kurz } A = \{x | p(x)\}.$$

   Das heißt: Alle x, die $p(x)$ zu einer wahren Aussage machen, gehören zur Menge $\mathcal{A}$. Die Variable x ist eine freie Variable. Dann ist auch folgender Ausdruck denkbar:

   $$\mathcal{B} = \{x | \exists y : q(x, y)\} \text{ ; x freie, y gebundene Variable.}$$

2 Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen!

   (a) $p_1 = \exists n \in \mathbb{N} : n! = 24$,
   (b) $p_2 = \exists! n \in \mathbb{N} : n! = 24$,
   (c) $p_3 = \exists! n \in \mathbb{N} : n! = 1$,
   (d) $p_4 = \forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0$,
   (e) $p_5 = \forall x, y \in \mathbb{R} : x > y$,
   (f) $p_6 = \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x > y$,
   (g) $p_7 = \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y$,
   (h) $p_8 = \exists x, y \in \mathbb{R} : x + y = y$,
   (i) $p_9 = \forall x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x$.

2. Formalisieren Sie mit Hilfe von Quantoren folgende verbale Aussagen:

   (a) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger $m = n+1$, der wieder eine natürliche Zahl ist.
   (b) Es ist stets $x = x$ für alle reellen x .
   (c) Es ist stets $x + y = y + x$ für alle reellen x.
   (d) Zu je zwei reellen Zahlen x und y gibt es stets eine dritte reelle Zahl z, für die $x + z = y$ ist.

(e) Es gibt eine bestimmte reelle Zahl x, die bei der Addition $a + x$ (a beliebig reell) keine Änderung hervorruft.

3. Ergänzen Sie durch die Worte „mindestens“, „höchstens“, „genau ein“, und zwar so, dass die entstehende Aussage wahr ist.

    (a) Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat ... eine reelle Lösung.

    (b) Die Ungleichnug $x > 1$ wird von ... einem x erfüllt.

    (c) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \neq 0, b$ beliebig) hat ... eine Lösung.

    (d) Gleichung $a \cdot x = b$ $(a = b = 0)$ hat ... eine Lösung.

4. Sei $\mathcal{X} = \{a, b\}$, $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ und $\mathcal{I} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}$. Geben Sie die Elemente der Menge $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} | \exists y \in Y : (x, y) \in \mathcal{I}\}$ an!

Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) $wp_1) = \text{W}$,

    (b) $w(p_2) = \text{W}$,

    (c) $w(p_3) = \text{F}$,

    (d) $w(p_4) = \text{F}$,

    (e) $w(p_4) = \text{F}$,

    (f) $w(p_5) = \text{W}$,

    (g) $w(p_6) = \text{W}$,

    (h) $w(p_7) = \text{W}$,

    (i) $w(p_8) = \text{W}$,

    (j) $w(p_9) = \text{W}$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m = n + 1$,

    (b) $\forall x \in \mathbb{R} : x = x$,

    (c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$,

    (d) $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$,

    (e) $\forall a \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R} : a + x = a$.

3. (a) *höchstens*

    (b) *mindestens*

    (c) *genau*

    (d) *mindestens*

    (e) $\mathcal{A} = \mathcal{X}$

Hilfen zu den Aufgaben

1. (a) $p_1 =$„Es gibt mindestens eine natürliche Zahl n, so dass $n! = 24$“, $n!$ (lies „n fakultät“) ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, wobei $0! = 1$ gesetzt, z.B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

(b) $p_2 =$ „Es gibt genau eine natürliche Zahl n mit $n! = 24$“.

(c) Vgl. 1.(a).

(d) $p_4 =$„Für alle reellen Zahlen ist das Produkt $x \cdot y = 0$“.

(e) $p_5 =$„Für alle reelle Zahlen gilt die Relation $x > y$“.

(f) $p_6 =$„Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y derart, dass $x > y$“.

(g) $p_7 =$ „Es gibt ein reelles x und ein reellles y, so dass $x > y$“.

(h) $p_8 =$ „Es gibt mindestens eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y, sodass $x + y = y$“.

(i) $p_9 =$„Zu jedem reellen x existiert genau ein reelles y derart, dass $x + y = x$“.

3. (a) Die angegebene quadratische Gleichung hat nur komplexe Lösungen, und zwar $\pm i$.

   (d) Betrachtet wird letztlich die Gleichung $0 \cdot x = 0$. Für welche x gilt diese?

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) $p_1 =$„Es gibt mindestens eine natürliche Zahl n, sodass $n! = 24$“; $n!$ (lies „n fakultät“) ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, wobei $0! = 1$ gesetzt, z.B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $n = 4$ leistet das Verlangte, also $w(p_1) =$ W.

   (b) $p_2 =$ „Es gibt genau eine natürliche Zahl n mit $n! = 24$. Da die Operation $n!$ eindeutig ist, gibt es nicht nur mindestens ein n, sondern genau ein n; $w(p_2) =$ W.

   (c) $p_3 =$„Es gibt genau eine natürliche Zahl n, sodass gilt: $n! = 1$. Das ist falsch, da $0! = 1! = 1$.

   (d) $p_4 =$„Für alle reellen Zahlen ist das Produkt $x \cdot y = 0$. Das Produkt $x \cdot y$ ist nur dann und nur dann Null, wenn wenigstens ein Faktor Null ist; $w(p_4) =$ F.

   (e) $p_5 =$„Für alle reelle Zahlen gilt die Relation $x > y$“; offensichtlich nicht, denn nimmt man beliebige Zahlen x, y, so muss diese Relation nicht gelten.

   (f) $p_6 =$„Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y derart, dass $x > y$“. Mit 1. (e) folgt, dass die Aussage wahr ist. Äquivalent wäre die Aussage „Zu jeder Zahl x gibt es eine kleinere“.

   (h) Die Aussage $p_8 =$ „Es gibt mindestens eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y, sodass $x + y = y$“ ist wahr, z.B. $x = 0, y = 1$.

   (i) $p_9 =$„Zu jedem reellen x existiert genau ein reelles y derart, dass $x + y = x$“. Diese Aussage ist eine Verschärfung von (h), und zwar der Satz über die Existenz der Null, x beliebig, $y = 0$.

2. Vgl. die **Lösungen zu den Aufgaben** 2. (a) - (e).

3. (a) Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat die beiden komplexen Lösungen $x_1 = +i$ und $x_2 = -i$, also hat sie keine reellen Lösungen. Man kann auch von *höchstens* einer reellen Lösung sprechen.

   (b) Die Ungleichung $x > 1$ wird von beliebig vielen Zahlen erfüllt, also auch von *mindestens* einer Zahl.

   (c) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \neq 0, b$ beliebig) hat die *einzige* Lösung $x = \frac{b}{a}$.

   (d) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a = b = 0$), also $0 \cdot x = 0$, ist für beliebige x erfüllt, also auch für *mindestens* ein x.