Siegfried Neuber

Zum Sprachgebrauch der Mathematik

Mit vielen Beispielen, Aufgaben, Lösungshilfen und ausführlich kommentierten Lösungen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Studienanfänger unterscheiden sich stark in ihren mathematischen Vorkenntnissen aus dem Sekundarbereich. Ihnen fällt der Übergang von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik im Allgemeinen nicht leicht. So mancher Schweißtropfen wird vergossen; so mancher ist nahe daran, an sich selbst zu zweifeln. Sie fragen sich, ob die Mathematik ihr Aufnahmevermögen übersteigt oder ihre Vorkenntnisse unzureichend sind.

Die Vermittlung mathematischer Inhalte geschieht oft unter Zeitdruck.Dieser begrenzt nicht nur den Umfang, sondern auch die Tiefe der Darstellung, was häufig zu Lasten des Verständnisses geht. In den Anfangsgründen des Unterrichts der höheren Mathematik spricht einiges dafür, möglichst schnell beim Aufbau des mathematischen Gebäudes voranzukommen. Dabei entsteht die Gefahr, auf die Schwierigkeiten nur mit leichter Hand hinzuweisen.

In der Lehre müssen die Akzente auf die hauptsächlichen, prinzipiellen Ideen, Grundbegriffe, Methoden und Verfahren gesetzt werden. Idee und Methode der Untersuchung sollten verstanden werden. Das Wesen ist an einfachen und durchsichtigen Beispielen zu erläutern.

Im Ergebnis der mathematischen Ausbildung muss beim Studenten eine gewisse mathematische Kultur entwickelt worden sein, die es ihm gestattet, sich in seinem Fachgebiet zurechtzufinden, erforderliche Literatur lesen zu können und, falls notwendig, mathematische Ausbildung im Selbststudium fortzusetzen.

Dies setzt generell voraus, dass der Lerner die mathematische Sprache versteht und aktiv einsetzen kann. Es ist typisch für die Mathematik, dass die Ergebnisse aus bestimmten Voraussetzungen durch logische Schlüsse hergeleitet werden. Das ist nur durch eine Sprache möglich, die sich von der Umgangssprache mit ihren Mehrdeutigkeiten und Bedeutungsschattierungen abhebt.

Im Laufe der Geschichte der Mathematik haben sich so Formulierungen herausgebildet, auch stark durch die Logik beeinflusst, dass sprachliche Missverständnisse nicht zu befürchten sind. „Der Wille des Verstandes zur Bestimmtheit und Klarheit drängt dazu, die vieldeutigen, gehaltvollen Worte in bestimmte, gehaltlose Zeichen zu verwandeln“.[1] An anderer Stelle heißt es: „Nur im Mathematisierbaren ist ein Wissen in willkürlich festzusetzenden Zeichen adäquat auszusprechen“.

Für Niels Bohr ist die mathematische Sprache eine Art Allgemeinsprache, die in der Lage ist, Sachverhalte darzulegen, die man in der Umgangssprache nur schwer oder überhaupt nicht ausdrücken kann.

[1] Vgl.K.Jaspers:Von der Wahrheit

Wenn auch diese Aussagen auf die gesamte Formelsprache der Mathematik zielen, die u.a. durch formalisierte axiomatische Systeme verbunden mit logischen Schlussregeln entsteht, so sollen im nachfolgenden Text grundlegende mathematische Rede- und Denkweisen vorgestellt und ausführlich erläutert werden.

Schließlich werden zu guter Letzt auch die grundlegenden Beweistechniken angesprochen. Das Beweisen stößt bei Studenten – so meine langjährige Lehrerfahrung – im Allgemeinen auf Ablehnung. Doch sind völlige Strenge und leichte Fasslichkeit keine unversöhnlichen Gegensätze. Allerdings muss man bei Nicht-Mathematikern plausible Behauptungen mit Augenmaß behandeln und das Beweisen auf zentrale, das Gebäude tragende Aussagen beschränken. Wenn auch am Anfang dafür etwas mehr Zeit geopfert werden muss, man also nicht so schnell voranschreiten kann, so zahlt sich diese Mühe später aus.

Es gehört meines Erachtens zu den wesentlichen Aufgaben der Mathematikausbildung – auch für Anwender –, den Lernenden neben der Anwendung auch mit den abstrakten Gedankengängen der höheren Mathematik vertraut zu machen, auch im Sinne der späteren Befähigung, sich mathematisches Wissen selbständig aneignen zu können.

Der vorliegende Text ist leicht lesbar, Einzelheiten werden sorgfältig ausgeführt und an Beispielen demonstriert, ohne dabei den roten Faden der Gedankenführung zu verlassen. Er soll helfen, ein Fundament des mathematischen Gebäudes – den mathematischen Sprachgebrauch – zu festigen. Er versteht sich nicht als Lehrbuch – etwa der mathematischen Logik, sondern als Nachschlagewerk, welches Sie zu den Vorlesungen, Übungen und Prüfungen hilfreich begleiten könnte.

Das Basiswissen, das zur Lösung der Übungsaufgaben gebraucht wird, ist in jedem Kapitel unter dem Abschnitt *Grundlagen* zu finden. Es wird anhand von Beispielen demonstriert. Zu den darauf folgenden Übungsaufgaben (*Aufgaben)* werden die Lösungen und Lösungsansätze (*Hilfen*)gegeben. Schließlich folgen dann zu allen Aufgaben ausführlichen Lösungsbeschreibungen (*Kommentierte Lösungen*).

Marienwerder, im April 2006 Siegfried Neuber

Kapitel 1

Aussagen und Aussageformen

1.1 Grundlagen

Ein erster unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Logik ist der Aussagenkalkül.

> Eine *Aussage* ist jeder Satz, von dem es sinnvoll ist zu behaupten, dass sein Inhalt entweder *wahr* oder *falsch* ist.

Ist eine Aussage eine zutreffende Beschreibung eines Sachverhaltes, so nennen wir die Aussage **wahr** bzw. eine **wahre Aussage**.

Ist eine Aussage eine nicht-zutreffende Beschreibung eines Sachverhaltes, so nennen wir diese Aussage **falsch** bzw. eine **falsche Aussage**.

Diese Tatsache wird durch den *Satz der Zweiwertigkeit* beschrieben: *Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch*, d.h. *jede Aussage ist wahr oder falsch* (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)und *es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist*(Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch).

Aussagen sind z.B.: „Die Mathematik ist keine Naturwissenschaft“ , „5 ist eine Primzahl“, „2 ist ein Teiler von 4“. Diese Aussagen sind offenbar alle wahr. Als Bezeichnungen für Aussagen verwenden wir die Variablen p, q, r usw.; eventuell auch indiziert.Betrachten wir als Beispiel die Aussage „3 mal 4 ist 12“, so schreiben wir kurz: $p =$„3 mal 4 ist 12“.

Durch den Satz der Zweiwertigkeit zerfällt die Menge aller Aussagen in zwei Teilmengen, nämlich die Menge aller wahren und in die aller falschen Aussagen, und dabei gehört jede Aussage genau einer der beiden Mengen an. Wir wollen die jeweiligen Mengen von Aussagen *Wahrheitswerte* nennen und mit W bzw. mit F bezeichnen. Die Wahrheit bzw. Falschheit einer Aussage p ist gleichwertig damit, dass p der Menge W bzw. F angehört. Man sagt dann kurz, dass p den Wahrheitswert W bzw. F besitzt, in Zeichen : $w(p) = W$ bzw. $w(p) = F$.

Wenn wir davon reden, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist, so wird damit nicht behauptet, dass man von jeder Aussage entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch ist. Bekanntlich ist die Aussage

p = „Für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$“

eine wahre Aussage. Betrachten wir von der Aussage nur den Bestandteil $q(a,b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, so ist dieser keine Aussage mehr, sondern eine sogenannte *Aussageform*. In ihr kommen *freie Variable*[1]vor, und zwar a, b. Sie ist weder wahr noch falsch. Sie selbst ist keine Aussage, sondern stellt nur eine Vorschrift zur Gewinnung von Aussagen dar. Ersetzt man a, b durch konkrete reelle Zahlen, so entsteht entweder eine wahre oder falsche Aussage, z.B. $a = 1, b = 2$, so folgt die Aussage $q(1,2) = (1+2)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 9$, die wahr ist.

Aussageformen kennzeichnen wir durch $p(x), p(x,y)$ usw.; x, y sind die freien Variablen, die aus einem bestimmten Grundbereich (Menge) $\mathcal{I}$ stammen, z.B. aus der Menge $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Auch in der Umgangssprache findet man Aussageformen, etwa „Er war ein berühmter Fußballspieler“. „Er“ ist die Variable. Ersetzt man diese durch „Franz Beckenbauer“, so entsteht offensichtlich eine wahre Aussage.

1.2 Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen:

   (a) $p_1 =$ „Jede Primzahl [2] ist ungerade“.

   (b) $p_2 =$ „Die Gleichung $x = x$ hat genau eine Lösung“.

   (c) $p_3 =$„Der absolute Betrag einer reellen Zahl ist nicht - negativ“.

   (d) $p_4 =$ „Die Funktion f mit der Gleichnug $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ ist in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig“.

   (e) $p_5 =$ „Jede in [a, b] stetige Funktion ist in (a, b) differenzierbar“.

2. Belegen Sie die Variablen folgender Aussageformen so, dass wahre Aussagen entstehen. Der Grundbereich sei die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

   (a) $p_1(x) =$ „$x = 1$“,

   (b) $p_2(x,y) =$ „$x < y$“ ,

   (c) $p_3(x,y) =$„$(x+y)^2 = x^2 + y^2$“,

   (d) $p_4(x,y,z) =$„$x^2 + y^2 + z^2 = 1$“,

   (e) $p_5(x) =$„ x ist eine Primzahl“.

Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) $w(p_1) =$F,

   (b) $w(p_2) =$F,

   (c) $w(p_3) =$W ,

   (d) $w(p_4) =$W,

[1]Auch in der Aussage p treten freie Variable auf, die aber durch die Generalisierung „Für jedes a, b“ *gebunden* werden. Ausführlich werden wird das im Kapitel 2 behandeln.

[2]Primzahl ist eine natürliche Zahl $n \neq 1$ und $n \neq 0$, die nur die trivialen Teiler 1 und n hat. Die ersten Zahlen der Primzahlfolge sind $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

   (e) $w(p_5)$ =F.

2. (a) $p_1(1)$ =„$1 = 1$“,
   (b) $p_2(1; 2)$ =„$1 < 2$“,
   (c) $p_3(0; 1)$ =„$(0 + 1)^2 = 0^2 + 1^2 = 1$“,
   (d) $p_4(0; 0; 1)$ =„$0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$“,
   (e) $p_5(19)$ =„19 ist eine Primzahl“.

Hilfen zu den Aufgaben

1. (a) Wie heißt die kleinste Primzahl - per Definition?
   (b) Für welche x wird die Gleichung $x = x$ wahr?
   (c) Nicht - negativ steht für *Null oder positiv* .
   (d) Anschaulich bedeutet die Stetigkeit im Intervall einen ununterbrochenen Kurvenverlauf der Funktion in diesem Intervall.
   (e) Anschaulich heißt Differenzierbarkeit an einer Stelle, dass man dort eindeutig eine Tangente anlegen kann. Ist das bei stetigen Funktionen stets der Fall? Denken Sie an die Betragsfunktion!

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) 2 ist die kleinste Primzahl, sie ist gerade, also $w(p_1)$ =F.
   (b) Die Gleichung $x = x$ hat unendlich viele Lösungen, da jede reelle Zahl x diese zur wahren Aussage macht, also $w(p_2)$ =F.
   (c) Aufgrund der Definition des absoluten Betrages [3]einer reellen Zahl x gilt stets $|x| \geq 0$, also nicht - negativ, damit $w(p_3)$ =W.
   (d) Die Sinus - Grundfunktion $f(x) = \sin x$ hat längs der reellen Achse einen ununterbrochenen Kurvenverlauf, d.h. $w(p_4)$ =W.
   (e) Zum Beispiel ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar; an der Spitze im Nullpunkt ist eine Tangente nicht eindeutig anlegbar.

2. (a) Setzt man $x = 1$, so entsteht die wahre Aussage $1 = 1$.
   (b) Natürlich gibt es beliebig viele Lösungen, u.a. $1 < 2$, auch -1 $<$ 0 usw.
   (c) Es gibt die drei Lösungen $(0+0)^2 = 0^2+0^2 = 0$; $(0+1)^2 = 0^2+1^2 = 1$ und $(1 + 0)^2 = 1^2 + 0^2 = 1$.
   (d) Alle reellen Zahlen x, y, z, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer Kugel mit dem Radius 1 im dreidimensionalen Raum, z.B. $x = 0, y = 0, z = 1$.
   (e) Es gibt beliebig viele x, nämlich alle Primzahlen , die p_5 zu einer wahren Aussage machen, z.B. $x = 19$.

[3] $|x| = +x$, falls x$\geq$ 0; $|x| = -x$, falls $x < 0$

Kapitel 2

Quantoren

2.1 Grundlagen

Nun soll auf die Redeweisen „Für alle …“, „Es gibt ein …“ usw. eingegangen werden.

> Die Aussage $p = \forall x \in \mathcal{I} : p(x)$ (lies: "Für alle x aus $\mathcal{I}$ gilt $p(x)$“ bzw. „Für alle x aus $\mathcal{I}$ gilt: x hat die Eigenschaft p“) besitzt nur dann den Wahrheitswert W, wenn $p(x)$ für alle x eines bestimmten Bereichs (Menge) $\mathcal{I}$ eine wahre Aussage darstellt. Das Symbol $\forall$ heißt **Allquantor**.

Die Bezeichnung des Grundbereichs (Menge) $\mathcal{I}$ kann auch entfallen, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind: $p = \forall x : p(x)$.

Neben der Möglichkeit, eine Aussageform $p(x)$ durch Belegen der Variablen x aus einem Bereich $\mathcal{I}$ in eine Aussage zu überführen, wird nunmehr durch die sogenannte **Bindung** der Variablen x mit dem Allquantor aus der Aussageform $p(x)$ eine Aussage p. Der Vorgang läßt sich auf mehrere Variable erweitern: Aus der Aussageform $p(x, y)$ wird durch Bindung der Variablen x, y die Aussage $p = \forall x \in \mathcal{I} \forall y \in \mathcal{I} : p(x, y)$, auch kürzer $p = \forall x, y \in \mathcal{I} : p(x, y)$.

Beispiele

1. p_1 =„Für alle reellen Zahlen x gilt: $\sqrt{x^2} = |x|$“ , kurz: $p_1 = \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$.
   Die Aussage ist wahr, denn jede reelle Zahl x hat die Eigenschaft, die Gleichung zu erfüllen.

2. p_2 = „Für alle Primzahlen gilt, dass sie ungerade sind“, oder „Alle Primzahlen sind ungerade“. Doch die Zahl 2 gehört auch zu den Primzahlen, ist aber nicht ungerade, also trifft die Eigenschaft *x ist ungerade* nicht auf alle Primzahlen zu, d.h. $w(p_2)$ =F.

3. $p_3 = \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ist wahr, da das Quadrat jeder reelen Zahl Null oder positiv (nicht - negativ) ist.

4. Die Aussage $p_4 =$ „Für alle reellen Zahlen x, y gilt: $(x+y)^2 = x^2+y^2$ bzw. $p_4 = \forall x, y \in \mathbb{R} : (x+y)^2 = x^2 + y^2$ ist falsch. Natürlich existieren Zahlen x, y - etwa $x = y = 0$ - für die diese Gleichung gilt, aber eben nicht für alle reellen Zahlen.

Gleichbedeutend mit der Redeweise „Für alle $x \ldots$“ sind die Ausdrucksweisen „Für jedes $x \ldots$“, „Für beliebiges $x \ldots$“ . Die Aussageform $q(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2$ kann natürlich auch durch Bindung mit einem anderen Quantor in eine wahre Aussage überführt werden.

> Die Aussage $q = \exists x \in \mathcal{I} : q(x)$ (lies: „Es existiert (gibt) ein x aus $\mathcal{I}$ so, dass $q(x)$ gilt“) besitzt nur dann den Wahrheitswert W, falls $q(x)$ für *mindestens* ein x aus $\mathcal{I}$ eine wahre Aussage darstellt. Das Symbol $\exists$ heißt **Existenzquantor**.

Daraus geht hervor, dass die Redeweise "Ès gibt ein ...“ im Gegensatz zur Umgangssprache steht, denn in mathematischen Texten ist immer „Es gibt *mindestens* ein...“ gemeint. Man muss als Anfänger das Wörtchen „mindestens“ gedanklich hinzufügen.

Existiert nur ein einziges Element x aus $\mathcal{I}$ auf das eine wohldefinierte Eigenschaft zutrifft, so sagt man „Es gibt *genau ein...*“ bzw. „Es gibt ein und nur ein ...“. Für diesen Fall benutzt man das Symbol $\exists!$, etwa $\exists! x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0$. Der Existenzquantor kann ebenfalls mehrfach auftreten : $\exists x \exists y \exists z : p(x, y, z)$.

Beispiele

1. $q_1 =$„Es gibt eine gerade Primzahl“, $w(q_1) =$W.
   Da es nur ein einziges Element mit dieser Eigenschaft aus der Menge der Primzahlen gibt, kann man die Aussage verschärfen zu „Es gibt genau eine gerade Primzahl“.

2. $q_2 =$ „Es gibt eine reelle Zahl x so, dass gilt: $x^2 = 1$“,
   kurz: $q_2 = \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$, $w(q_2) =$W , denn es gibt mindestens ein reelles Element x (z.B. $x = 1$) mit dieser Eigenschaft.

3. Die Aussage $q_3 = \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ist sicher falsch, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist Null oder positiv.

4. $q_4 = \exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x+y = 0$, $w(q_4) =$W, weil beispielsweise $1+(-1) = 0$, während $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ falsch ist, etwa $1 + (-2) \neq 0$.

Will man zum Ausdruck bringen, dass es nicht mehr als ein Element aus $\mathcal{I}$ gibt, auf das eine bestimmte Eigenschaft zutrifft, so benutzt man die Redeweise „Es gibt höchstens ein ...“; sie ist äquivalent mit „Es gibt genau ein oder kein Element ...“. Zum Beispiel ist die Aussage „Zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_1 der Ebene haben höchstens einen Punkt gemeinsam“ eine wahre Aussage, denn entweder haben sie keinen gemeinsamen Schnittpunkt – die Geraden verlaufen parallel – oder sie haben genau einen Schnittpunkt miteinander.

Im Zusammenhang mit der Redeweise „genau ein“ wollen wir noch auf den Gebrauch bestimmter Artikel hinweisen. Es macht Sinn, von *der* geraden Primzahl bzw. von *der* Lösung der Gleichung $2x = 1$ zu sprechen, weil es jeweils nur genau ein Element mit der geforderten Eigenschaft gibt. Dagegen macht es keinen Sinn, von *der* Nullstelle der Funktion $f(x) = x^5 - 1$, $x \in \mathbb{C}$ zu reden, da es nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau 5 Nullstellen im Bereich $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen gibt.

Der Allquantor und der Existenzquantor können in mathematischen Texten häufig gemischt auftreten, z.B. $\exists x \forall y$ (lies: „Es gibt ein x, sodass für alle y gilt“) oder $\forall x \exists y$ (lies: „Für alle x existiert ein y, so dass gilt“). Die zu einem Quantorsymbol gehörige Variable nennt man *gebundene Variable*. Sie spielt eine ähnliche Rolle wie die Integrationsvariable in der Integralrechnung; die übrigen Variablen heißen *freie Variable*.

Beispiele

1. Der Grundbereich sei $\mathbb{R}$.
   Die Aussage $\forall x \exists y : x + y = 0$ ist wahr, denn sie behauptet, dass zu jeder reellen Zahl x mindestens eine reelle y existiert, und zwar derart, dass $x + y = 0$, nämlich $x + (-x) = 0$.

2. Aber! $\exists x \forall y : x + y = 0$ ist nicht möglich, da es zu einem x nicht beliebig viele y gibt, die die Eigenschaft $x + y = 0$ erfüllen. Beachten Sie: Die Quantoren sind nicht einfach vertauschbar!

3. Eine Menge $\mathcal{A}$ wird u.a. durch eine Aussagenform $p(x)$ beschrieben, und zwar derart:

   $$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{I} | w(p(x)) = \text{W}\}, \text{ kurz } A = \{x | p(x)\}.$$

   Das heißt: Alle x, die $p(x)$ zu einer wahren Aussage machen, gehören zur Menge $\mathcal{A}$. Die Variable x ist eine freie Variable. Dann ist auch folgender Ausdruck denkbar:

   $$\mathcal{B} = \{x | \exists y : q(x, y)\} \text{ ; x freie, y gebundene Variable.}$$

2.2 Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen!

   (a) $p_1 = \exists n \in \mathbb{N} : n! = 24$,
   (b) $p_2 = \exists! n \in \mathbb{N} : n! = 24$,
   (c) $p_3 = \exists! n \in \mathbb{N} : n! = 1$,
   (d) $p_4 = \forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0$,
   (e) $p_5 = \forall x, y \in \mathbb{R} : x > y$,
   (f) $p_6 = \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x > y$,
   (g) $p_7 = \exists x, y \in \mathbb{R} : x > y$,

(h) $p_8 = \exists x, y \in \mathbb{R} : x + y = y$,

(i) $p_9 = \forall x \in \mathbb{R}\exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x$.

2. Formalisieren Sie mit Hilfe von Quantoren folgende verbale Aussagen:

   (a) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger $m = n+1$, der wieder eine natürliche Zahl ist.

   (b) Es ist stets $x = x$ für alle reellen x .

   (c) Es ist stets $x + y = y + x$ für alle reellen x.

   (d) Zu je zwei reellen Zahlen x und y gibt es stets eine dritte reelle Zahl z, für die $x + z = y$ ist.

   (e) Es gibt eine bestimmte reelle Zahl x, die bei der Addition $a + x$ (a beliebig reell) keine Änderung hervorruft.

3. Ergänzen Sie durch die Worte „mindestens“, „höchstens“, „genau ein“, und zwar so, dass die entstehende Aussage wahr ist.

   (a) Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat ... eine reelle Lösung.

   (b) Die Ungleichnug $x > 1$ wird von ... einem x erfüllt.

   (c) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \neq 0, b$ beliebig) hat ... eine Lösung.

   (d) Gleichung $a \cdot x = b$ $(a = b = 0)$ hat ... eine Lösung.

4. Sei $\mathcal{X} = \{a, b\}$, $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ und $\mathcal{I} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}$. Geben Sie die Elemente der Menge $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} | \exists y \in Y : (x, y) \in \mathcal{I}\}$ an!

Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) $wp_1) = \text{W}$,

   (b) $w(p_2) = \text{W}$,

   (c) $w(p_3) = \text{F}$,

   (d) $w(p_4) = \text{F}$,

   (e) $w(p_4) = \text{F}$,

   (f) $w(p_5) = \text{W}$,

   (g) $w(p_6) = \text{W}$,

   (h) $w(p_7) = \text{W}$,

   (i) $w(p_8) = \text{W}$,

   (j) $w(p_9) = \text{W}$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}\exists m \in \mathbb{N} : m = n + 1$,

   (b) $\forall x \in \mathbb{R} : x = x$,

   (c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$,

   (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}\exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$,

   (e) $\forall a \in \mathbb{R}\exists! x \in \mathbb{R} : a + x = a$.

3. (a) *höchstens*
   (b) *mindestens*
   (c) *genau*
   (d) *mindestens*
   (e) $\mathcal{A} = \mathcal{X}$

Hilfen zu den Aufgaben

1. (a) p_1 =„Es gibt mindestens eine natürliche Zahl n, so dass $n! = 24$“, $n!$ (lies „n fakultät“) ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, wobei $0! = 1$ gesetzt, z.B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.
   (b) p_2 = „Es gibt genau eine natürliche Zahl n mit $n! = 24$“.
   (c) Vgl. 1.(a).
   (d) p_4 =„Für alle reellen Zahlen ist das Produkt $x \cdot y = 0$“.
   (e) p_5 =„Für alle reelle Zahlen gilt die Relation $x > y$“.
   (f) p_6 =„Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y derart, dass $x > y$“.
   (g) p_7 = „Es gibt ein reelles x und ein reellles y, so dass $x > y$“.
   (h) p_8 = „Es gibt mindestens eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y, sodass $x + y = y$“.
   (i) p_9 =„Zu jedem reellen x existiert genau ein reelles y derart, dass $x + y = x$“.

3. (a) Die angegebene quadratische Gleichung hat nur komplexe Lösungen, und zwar $\pm i$.
   (d) Betrachtet wird letztlich die Gleichung $0 \cdot x = 0$. Für welche x gilt diese?

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) p_1 =„Es gibt mindestens eine natürliche Zahl n, sodass $n! = 24$“; $n!$ (lies „n fakultät“) ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, wobei $0! = 1$ gesetzt, z.B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $n = 4$ leistet das Verlangte, also $w(p_1) = \mathrm{W}$.
   (b) p_2 = „Es gibt genau eine natürliche Zahl n mit $n! = 24$. Da die Operation $n!$ eindeutig ist, gibt es nicht nur mindestens ein n, sondern genau ein n; $w(p_2) = \mathrm{W}$.
   (c) p_3 =„Es gibt genau eine natürliche Zahl n, sodass gilt: $n! = 1$. Das ist falsch, da $0! = 1! = 1$.
   (d) p_4 =„Für alle reellen Zahlen ist das Produkt $x \cdot y = 0$. Das Produkt $x \cdot y$ ist nur dann und nur dann Null, wenn wenigstens ein Faktor Null ist; $w(p_4) = \mathrm{F}$.
   (e) p_5 =„Für alle reelle Zahlen gilt die Relation $x > y$“; offensichtlich nicht, denn nimmt man beliebige Zahlen x, y, so muss diese Relation nicht gelten.

(f) p_6 =„Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y derart, dass $x > y$“. Mit 1. (e) folgt, dass die Aussage wahr ist. Äquivalent wäre die Aussage „Zu jeder Zahl x gibt es eine kleinere“.

(h) Die Aussage p_8 = „Es gibt mindestens eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y, sodass $x + y = y$“ ist wahr, z.B. $x = 0, y = 1$.

(i) p_9 =„Zu jedem reellen x existiert genau ein reelles y derart, dass $x + y = x$“. Diese Aussage ist eine Verschärfung von (h), und zwar der Satz über die Existenz der Null, x beliebig, $y = 0$.

2. Vgl. die **Lösungen zu den Aufgaben** 2. (a) - (e).

3. (a) Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat die beiden komplexen Lösungen $x_1 = +i$ und $x_2 = -i$, also hat sie keine reellen Lösungen. Man kann auch von *höchstens* einer reellen Lösung sprechen.

   (b) Die Ungleichung $x > 1$ wird von beliebig vielen Zahlen erfüllt, also auch von *mindestens* einer Zahl.

   (c) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \neq 0, b$ beliebig) hat die *einzige* Lösung $x = \frac{b}{a}$.

   (d) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a = b = 0$), also $0 \cdot x = 0$, ist für beliebige x erfüllt, also auch für *mindestens* ein x.

Kapitel 3

Aussagenverbindungen

Aussagen können durch bestimmte *Bindewörter* zu neuen Aussagen verknüpft werden. Zum Beispiel kann man die beiden Aussagen „2 ist kleiner als 3“, „der Schnee ist rot“ zur neuen Aussage „2 ist kleiner als 3 und der Schnee ist rot“ verknüpfen. Die Verknüpfungen von Aussagen werden sprachlich durch die Bindewörter *nicht*, *oder*, *und*, *wenn - so* und *genau dann, wenn* gegeben.
Der Wahrheitswert der Aussagenverknüpfung ist nur vom Wahrheitswert der verknüpften Aussagen, nicht von ihrem Inhalt abhängig.

3.1 Die Negation

3.1.1 Grundlagen

Wir wollen uns dem Bilden des *logischen Gegenteils* einer vorgegebenen Aussage zuwenden.

> Die Aussage $\bar{p}$ (lies "nicht p") , die das logische Gegenteil einer vorgegebenen Aussage p ausdrückt, nennt man **Negation** von p; $\bar{p}$ ist wahr, wenn p falsch ist,und $\overline{p}$ ist falsch, wenn p wahr ist.

Der Sachverhalt lässt sich durch folgende Tabelle darstellen:

p	$\bar{p}$
W	F
F	W

Tabelle 3.1: Negation

Die Aussage $\bar{p}$ kann man u.a. sprachlich ausdrücken durch „Es ist nicht wahr, dass p gilt“oder durch Voranstellen von „nicht“.

Beispielsweise $p =$ „$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl“, $\overline{p} =$ „Es ist nicht wahr, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist“.

Es gilt offensichtlich:

$$\overline{\overline{p}} = p \tag{3.1}$$

Nun zur Negation quantifizierter Aussagen.

> Gegeben sei die Aussage $p = \forall x \in \mathcal{I} : p(x)$. Dann heißt $\overline{p} = \overline{\forall x \in \mathcal{I} : p(x)}$ (lies:„Es ist nicht wahr, dass für alle x aus $\mathcal{I} p(x)$ gilt“ bzw. „Nicht alle x aus $\mathcal{I}$ haben die Eigenschaft p“) die Negation von p.

Beispiele

1. $p =$ „Alle natürlichen Zahlen n sind Primzahlen“,
   $p = \forall n \in \mathbb{N} : p(n)$, wobei $p(n) =$ „n ist Primzahl“. Negiert man diese falsche Aussage, so folgt die wahre Aussage
   $\overline{p} =$ „Nicht alle natürlichen Zahlen n sind Primzahlen“ bzw. $\overline{p} =$ „Es ist nicht wahr, dass alle natürlichen Zahlen n Primzahlen sind“, formalisiert: $\overline{p} = \overline{\forall n \in \mathbb{N} : p(n)}$.
   Mit anderen Worten: Es gibt natürliche Zahlen, die keine Primzahlen sind; symbolisch ausgedrückt: $\overline{p} = \exists n \in \mathbb{N} : \overline{p(n)}$. Daraus folgt die Gleichung $\overline{\forall n \in \mathbb{N} : p(n)} = \exists n \in \mathbb{N} : \overline{p(n)}$.

2. Beachten Sie, dass ein bloßes Verändern der Reihenfolge des Wortes „nicht“ in einer Aussage durchaus zu Fehlern führen kann.
   $p =$„Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen“,
   $q =$„Alle natürlichen Zahlen sind nicht (keine) Primzahlen“.
   Während $w(p) = W$, ist $w(q) = F$, denn es gibt natürliche Zahlen, die auch Primzahlen sind. Es ist somit klar zu unterscheiden zwischen „Nicht alle ...“ und „Alle ... nicht “.

Zur Negation des Existenzoperators.

> Gegeben sei die Aussage $q = \exists x \in \mathcal{I} : q(x)$. Dann ist die Aussage $\overline{q} = \overline{\exists x \in \mathcal{I} : q(x)}$ (lies:„Es gibt kein x aus $\mathcal{I}$ so (derart), dass $q(x)$ gilt bzw. „Es gibt kein x aus $\mathcal{I}$ mit der Eigenschaft q“) die Negation von q.

Beispielsweise sei $q =$ „Es gibt natürliche Zahlen, die Primzahlen sind“, formalisiert: $q = \exists n \in \mathbb{N} : q(n)$; $\quad q(n) =$„n ist Primzahl“;
$\overline{q} = \overline{\exists n \in \mathbb{N} : q(n)}$, mit anderen Worten: Alle natürlichen Zahlen sind keine Primzahlen.
Daraus folgt die Beziehung: $\overline{q} = \overline{\exists n \in \mathbb{N} : q(n)} = \forall n \in \mathbb{N} : \overline{q(n)}$.

Wir fassen zusammen:
Zu „Nicht alle x haben die Eigenschaft p“ ist äquivalent die Redeweise „Es gibt ein x, das die Eigenschaft p nicht hat“, in Zeichen:

$$\overline{p} = \overline{\forall x \in \mathcal{I} : p(x)} = \exists x \in \mathcal{I} : \overline{p(x)}. \tag{3.2}$$

Zu „Es gibt kein x, das die Eigenschaft q hat“ ist gleichbedeutend „Alle x haben nicht die Eigenschaft p“, in Zeichen:

$$\overline{q} = \overline{\exists x \in \mathcal{I} : q(x)} = \forall x \in \mathcal{I} : \overline{q(x)}. \tag{3.3}$$

Abschließend sei im Zusammenhang mit der Negation auch der **Nullquantor** erwähnt.

> Die Aussage $r = Nx \in \mathcal{I} : p(x) = \forall x \in \mathcal{I} : \overline{p(x)}$ (lies: „Für kein x aus $\mathcal{I}$ gilt $p(x)$. N heißt **Nullquantor**. Er kann folglich auf den Allquantor zurückgeführt werden.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass man auch eine Aussageform negieren kann. Es ist nur zu sichern, dass bei der Belegung der Variablen aus einem Individuenbereich $\mathcal{I}$ eine Aussage entsteht.
Die Negation ist auf mehrere Quantoren anwendbar, z.B. $\overline{\exists n \exists m : p(n, m)}$.

3.1.2 Aufgaben

1. Gegeben sei folgende Aussage:$p =$ „Alle Computer arbeiten einwandfrei“. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen Negationen von p sind:
   a) „Nicht alle Computer arbeiten einwandfrei“.
   b) „Kein Computer arbeitet einwandfrei“.
   c) „Alle Computer arbeiten nicht einwandfrei“.
   d) „Wenigstens ein Computer arbeitet fehlerhaft“.

2. Wie lautet die Negation der Aussage $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$?

3. Wie lautet die äquivalente Redeweise zu „Es ist nicht wahr, dass alle Studenten die Mathematik nicht lieben“.

4. Negieren Sie folgende Aussagen (Individuenbereich $\mathcal{I} = \mathbb{R}$):
   (a) $p_1 = \exists x \exists y : x + y = y$,
   (b) $p_2 = \exists x : x^2 \neq 0$,
   (c) $p_3 = \forall x \forall y : x < y$.

5. Beschreiben Sie folgende Mengen durch Aufzählung, falls $\mathcal{I} = \{\ 0,\ 1\ \}$:
   (a) $\mathcal{A} = \{x | \exists y : x < y\}$,
   (b) $\mathcal{B} = \{x | \forall y : x < y\ \}$,
   (c) $\mathcal{C} = \{(x, y)| \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} | \exists z : x + y = z\ \}$,
   (d) Drücken Sie mit dem Nullquantor aus „Die Gleichung $e^x = 0$ besitzt keine reellen Lösungen“.

Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) Negation von p.
   (b) Keine Negation von p.
   (c) Keine Negation von p.
   (d) Negation von p.
2. $\overline{p} = \exists x : x^2 \leq 0$.
3. Gleichwertige Redeweise:„Alle Studenten lieben die Mathematik“.
4. (a) $\overline{p_1} = \exists x \exists y : x + y \neq y$.
   (b) $\overline{p_2} = \forall x : x^2 = 0$.
   (c) $\overline{p_3} = \exists x \exists y : x \geq y$.
5. (a) $\mathcal{A} = \{ \ 0 \ \}$.
   (b) $\mathcal{B} = \emptyset$.
   (c) $\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0)\ \}$.
   (d) $Nx \in \mathbb{R} : e^x = 0$.

Hilfen zu den Aufgaben

1. (b) *kein* ist nicht das logische Gegenteil von *alle*; siehe auch 1. (c).
   (c) $\overline{p}$ = „Es ist nicht wahr, dass alle Computer $\cdots$“. Ist das mit der Aussage 1.(d) identisch?
2. Benutzen Sie formal die Gleichung (3.2).
3. (a) Zweimalige Anwendung von (3.3).
   (b) Anwendung (3.3).
   (c) Zweimalige Anwendung von (3.2).
4. Hier müssen Sie sich darüber klarwerden, welche Variable gebunden, welche frei ist; Werte für x, y werden aus $\mathcal{I}$ entnommen.
5. Lesen Sie sich die Erklärung für den Nullquantor durch.

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) Diese Aussage ist die Negation von p, da einfach das Wort *nicht* davor gesetzt wurde.
   (b) $\overline{p}$ = „Es ist nicht wahr, dass alle Computer einwandfrei arbeiten“ heißt doch, es gibt welche (wenigstens ein Computer), die fehlerhaft arbeiten, aber eben nicht alle, also ist 1.(b) nicht die Negation von p.
2. Mit $p(x) =$ „$x^2 > 0$“ und (3.2) folgt die Lösung.
3. Doppelte Verneinung.

4. (a) Mit (3.3) folgt schrittweise:

$$\begin{aligned}\overline{p_1} &= \overline{\exists x(\exists y : x+y=y)} \\ &= \overline{xy} : \overline{(x+y=y)} \\ &= \forall x \forall y : x+y \neq y.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overline{p_2} &= \overline{\exists x : x^2 \neq 0} \\ &= \overline{\exists x} : \overline{x^2 \neq 0} \\ &= \forall x : x^2 = 0.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\overline{p_3} &= \overline{\forall x \forall y : x < y} \\ &= \overline{\forall x \forall y :}\overline{x < y} \\ &= \exists x \exists y : x \geq y.\end{aligned}$$

5 (a) - (d) vgl. Sie **Lösung** 5.

3.2 Die Alternative

3.2.1 Grundlagen

Die Aussage $p \vee q$ (lies „p oder q“), die die Verknüpfung zweier Aussagen p, q darstellt, nennt man **Alternative**, die dann und nur dann richtig ist, wenn *mindestens* einer der beiden Aussagenp, q richtig ist.

Der Sachverhalt wird in Tabelle 3.2 dargestellt.

Es ist noch anzumerken, dass die Alternative $p \vee q$ nicht mit dem ausschließenden

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Tabelle 3.2: Alternative

entweder - oder verwechselt werden darf. Sie hat vielmehr die Bedeutung von *oder auch*, d.h. die Möglichkeit des Zusammenbestehens von p, q wird zugelassen. Das Bindewort *oder* wird in der Mathematik generell im *nichtausschließenden*

p	q	$p \vee q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Tabelle 3.3: Entweder-oder

Sinne verwendet.

Beispiele

1. Die Aussage „2 oder 4 ist ein Teiler von 32“ ist wahr, denn $2 \cdot 16 = 32$; 4 ist auch ein Teiler von 32.

2. Dagegen ist die Aussage„Entweder 2 oder 4 ist ein Teiler von 32“ falsch.

3. Betrachten wir die Alternative (Aussageform) $p(x) \vee q(x) =$ „x<1“ $\vee$ „x<2“. Sie geht nur dann in eine falsche Aussage über, falls man $x \geq 2$ wählt.

4. $\mathcal{A} = \{\ a, b, c\ \}$ und $\mathcal{B} = \{\ c, d\ \}$.Dann gilt für die Vereinigungsmenge $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x | x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\} = \{a, b, c, d\}$, denn für diese 4 Elemente geht die alternative Aussageform in eine wahre Aussage über.

5. Beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen treten oft Fallunterscheidungen auf. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ wird durch Vereinigung der Teillösungen aus den Fallunterscheidungen ermittelt.
   Gesucht sei die Lösungsmenge der Ungleichung
   $$|x + 1| < 2x.$$
   Mit der Betragsdefinition
   $$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1), x + 1 < 0 \end{cases}$$
   folgen zwei Fälle: a) $x + 1 < 2x$ mit $x \geq -1$, also $x > 1$, mithin die Teillösung $\mathcal{L}_1 = (1, +\infty)$.
   b) $-(x + 1) < 2x$ mit $x < -1$, also $x > -1/3$, mithin unter Beachtung $x < -1$ folgt $\mathcal{L}_2 = \emptyset$.
   Die Gesamtlösung: $\mathcal{L} = (1, +\infty) \cup \emptyset = (1, +\infty)$.

6. Ein Grundbegriff in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das *zufällige Ereignis* [1]. Ein Ereignis $\mathcal{A}$ – einfach ausgedrückt – nennt man *zufällig*, falls

[1] Ereignisse werden wie Mengen symbolisiert, da der Mengenbegriff als mathematisches Modell zufälliger Ereignisse dient.

es im Rahmen eines Versuchs eintreten kann, aber nicht eintreten muss. Zum Beispiel sei der Versuch *das einmalige Werfen eines Würfels*; dann ist „Es fällt die Augenzahl 2“ ein zufälliges Ereignis $\mathcal{A}$. Sei nun noch $\mathcal{B}$ das Ereignis „Es fällt die Augenzahl 4“, so ist das neue Ereignis $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$(lies hier: „$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$) das Ereignis, welches eintritt, wenn mindestens eines der Ereignisse eintritt. Fällt also bei einem Wurf die „4“, so ist das Ereignis $\mathcal{C}$ eingetreten. Erscheint bei einem Wurf weder eine „2“ noch eine „4“, so ist $\mathcal{C}$ nicht eingetreten.

Mit Hilfe der Tabelle 3.2 lassen sich leicht folgende Rechenregeln bestätigen:

$$p \vee q = q \vee p \,(Kommutativitt) \tag{3.4}$$

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r \,(Assoziativitt) \tag{3.5}$$

$$p \vee p = p \,(Idempotenz) \tag{3.6}$$

$$p \vee \overline{p} = W \tag{3.7}$$

$$p \vee W = W \tag{3.8}$$

$$p \vee F = F \tag{3.9}$$

3.2.2 Aufgaben

1. Weisen Sie die Rechenregeln (3.6) bis (3.9) nach!

2. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte folgender Aussagen:

   (a) 0 oder 1 ist Lösung der Gleichung $x^2 = 1$.

   (b) -1 oder 1 ist Lösung der Gleichung $x^2 = 1$.

3. Es seien x, y reelle Zahlen und es sei $x \cdot y = 0$. Welche Schlussfolgerung ist richtig?

   (a) Entweder $x = 0$ oder $y = 0$.

   (b) $x = 0$ oder $y = 0$.

4. Sei x reelle Zahl mit $0 \leq x \leq \pi$. Dafür gelte $x \cdot sinx = 0$.
   Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

   (a) Entweder $x = 0$ oder $x = \pi$.

   (b) $x = 0$ oder $x = \pi$.

5. $\mathcal{A} = \{a, b, c\,\}$ und $\mathcal{B} = \{a, 1\,\}$. Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{C} = \{x|x$ entweder aus $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}\,\}$.

6. Formalisieren Sie:

   (a) $\mathcal{D} =$ „Von den drei Ereignissen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ tritt mindestens eines ein“.

   (b) $\mathcal{E} =$ „Von den drei Ereignissen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ treten höchstens zwei ein“.

Lösungen zu den Aufgaben

1. Zu (3.6)
   $p = W : p \vee p = W \vee W = W = p$,
   $p = F : p \vee p = F \vee F = F = p$.
   Analog behandelt man (3.7) bis (3.9).

2. (a) wahr (b) wahr.

3. (a) falsche Aussage (b) wahre Aussage.

4. (a) falsch (b) wahr.

5. $\mathcal{C} = \{b, c, 1\}$.

6. (a) Das Ereignis $\mathcal{D}$ ist äquivalent zu „$\mathcal{A}$ tritt ein *oder* $\mathcal{B}$ tritt ein *oder* $\mathcal{C}$ tritt ein“, formal $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

   (b) Das Ereignis $\mathcal{E}$ ist äquivalent zu „Die Ereignisse $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ treten nicht alle ein “, d.h. $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}} \cup \overline{\mathcal{C}}$.

Hilfen zu den Aufgaben

2. Die Aussage lautet ausführlich:„0 ist Lösung der Gleichung $x^2 = 1$ *oder* 1 ist Lösung der Gleichung $x^2 = 1$“. Mindestens eine Aussage muss richtig sein, wenn die Gesamtaussage wahr sein soll.
3. Denken sie an den Fall $x = y = 0$!
4. Nur ein Spezialfall der Aufgabe 3.
5. Prüfen Sie, für welche x wird die Aussage „Entweder $x \in \mathcal{A}$ oder $x \in \mathcal{B}$ wahr.

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

2. (a) Die Aussage ist wahr, denn 1 ist Lösung der Gleichung, 0 dagegen nicht. Es genügt mindestens eine wahre Aussage.
   (b) Ist eine wahre Aussage, denn beide Zahlen sind Lösung der Gleichung.

4. (a)und (b):Setzen Sie $sinx = y$, so können Sie der Argumentation von 3. folgen; $x = 0$,$x = \pi$ sind Nullstellen der Sinus- Funktion im definierten Intervall.

5. Zur Menge $\mathcal{C}$ gehören alle Elemente, für die gilt: $x \in \mathcal{A}$ und $x \notin \mathcal{B}$ und umgekehrt, z.B. ist das Element a in beiden Mengen, damit wird die Aussage „Entweder $a \in \mathcal{A}$ oder $a \in \mathcal{B}$“ falsch; für die Elemente $b, c, 1$ trifft das nicht zu.

3.3 Die Konjunktion

3.3.1 Grundlagen

Die Aussage $p \wedge q$ (lies „p und q"), die die Verknüpfung zweier Aussagen p, q darstellt, nennt man **Konjuntion**, die dann und nur dann wahr ist, wenn sowohl p als auch q wahr ist.

Vergleiche Tabelle 3.4!

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Tabelle 3.4: Konjunktion

Beispiele

1. „$\sqrt{(-4)^2} = -4$ *und* $\sqrt{-1}$ ist im Bereich der reelen Zahlen nicht definiert".
Diese Aussage ist falsch, da der erste Teil falsch ist , denn$\sqrt{(-4)^2} = 4$, der zweite Teil der Aussage ist richtig.

2. Das abgeschlossene Intervall $a \leq x \leq b$ steht für die Aussageform
$a \leq x \wedge x \leq b$ bzw. in Mengenschreibweise [a, b] = $\{x|a \leq x \wedge x \leq b\}$.

3. Es gibt das Ereignis $\mathcal{C}= \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, das nur dann eintritt, wenn sowohl das Ereignis $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ eintritt. Mit den dort definierten Ereignissen wäre $\mathcal{C} = \emptyset$ (*unmögliches Ereignis).*

4. Sei $\mathcal{A}$=$\{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{a, 1, b\}$.
Die mengentheoretische Durchschnittsmenge ist definiert durch $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$=$\{x|x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$. Somit ist $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$=$\{1\}$, da die Aussagen $1 \in \mathcal{A}$, $1 \in \mathcal{B}$ wahr sind.

5. Gesucht ist die Punktmenge $\mathcal{P}$=$\{(x, y)||x| + |y| \leq 1\}$!
Aus $|x| + |y| \leq 1$ folgt durch Umstellung unmittelbar $|y| \leq 1 - |x|$.
1. Fall: $\mathcal{P}_1$=$\{(x, y)|y \geq 0 \wedge y \leq 1 - |x|\}$
und
2. Fall $\mathcal{P}_2$=$\{(x, y)|y < 0 \wedge y \geq |x| - 1\}$.
Nun ergibt sich die Gesamtmenge $\mathcal{P}$ als Durchschnitt von $\mathcal{P}_1$und $\mathcal{P}_2$, da die Punkte (x, y) sowohl unterhalb der Kurve y = 1 - | x | (und auf der Kurve) als auch oberhalb der Kurve y= | x | - 1 (und auf der Kurve) liegen müssen. Die Lösungsmenge $\mathcal{P}$ ist die Punktmenge eines um 45 Grad (pos. Drehsinn) gedrehten Quadrats mit der Seitenlänge $\sqrt{2}$.

6. Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{3x}{x+1} \leq |x-4|.$$

1. Fall: $x \neq -1$ **und** $x - 4 \geq 0 (x \geq 4)$ **und** $x + 1 > 0$.
Aus diesen konjunktiv zusammengesetzten Bedingungen folgt der Grundbereich $\mathcal{I}$: $x \geq 4$ über dem die Rechnung für Fall 1 durchgeführt wird:

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x+1} &\leq x-4 \\
3x &\leq (x+1)(x-4), (\star) \quad \text{falls } (x+1) > 0 \\
&\leq x^2 - 3x - 4 \\
0 &\leq x^2 - 6x - 4 \\
0 &\leq (x-3)^2 - 13, \quad \text{quadratische Ergänzung} \\
(x-3)^2 &\geq 13 \\
|x-3| &\geq \sqrt{13}, \quad \text{beachte: } \sqrt{a^2} = |a|.
\end{aligned}$$

Dann folgt: $x \geq 3 + \sqrt{13}$ oder $x \leq 3 - \sqrt{13}$. Da aber laut Voraussetzung $x \geq 4$, entfällt die zweite Ungleichung und man erhält man die Teillösung $\mathcal{L}_1 = (3 + \sqrt{13}, +\infty)$.
Es gibt weitere drei Fälle, die im Textteil *Kommentierte Lösungen* vorgestellt werden.

Ähnlich wie in der Arithmetik für die Multiplikation vereinbart man auch für den Operator „$\wedge$ “ die Kurzschreibweise $pq = p \wedge q$, was bei komplizierteren Ausdrücken zu mehr Übersichtlichkeit führt.

Der Operator „$\wedge$“ kommt vor „$\vee$ “ (Vorrangregel), z.B. $p \vee qr$ heißt $p \vee (qr)$. Will man den Vorrang ändern, so setzt man Klammern ein, etwa $(p \vee q) \wedge r$.
Es gelten folgende Rechenregeln:

$$p \vee q = q \wedge p, \quad (\textit{Kommutativität}) \tag{3.10}$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r = p \wedge q \wedge r, \quad (\textit{Assoziativität}) \tag{3.11}$$

$$p \wedge p = p, \quad (\textit{Idempotenz}) \tag{3.12}$$

$$p \wedge \overline{p} = F \tag{3.13}$$

$$p \wedge W = p \tag{3.14}$$

$$p \wedge F = F \tag{3.15}$$

Weiter gelten unter der Berücksichtigung der *Alternative*:

$$p(q \vee r) = pq \vee pr \quad \textit{und} \quad p \vee (qr) = (p \vee q)(p \vee r), \quad (\textit{Distributivität}) \tag{3.16}$$

$$p(p \vee q) = p \quad \textit{und} \quad p \vee (pq) = p, \quad (\textit{Absorption}) \tag{3.17}$$

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \quad \textit{und} \quad \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \text{(Regel von De Morgan)} \tag{3.18}$$

Alle Regeln lassen sich wieder mittels der definierten Tabellen beweisen. Bei Regel (3.16) ist zu beachten, dass der Ausdruck 3 Variable enthält, was zur Folge hat, dass die Tabelle 8 Belegungen aufweist: FFF, FFW, FWF, ..., WWW. Allgemein gilt: Hat ein Ausdruck n Variable, so gibt es 2^n Belegungen.

Zur wichtigen Regel von De Morgan. Sie bringt zum Ausdruck, wie man richtig eine *Alternative* bzw. eine *Konjunktion* negiert. Betrachten wir die Ungleichung $2 \leq x \leq 3$ bzw. die Aussageform $2 \leq x \wedge x \leq 3$. Diese soll negiert werden, also

$$\begin{aligned} \overline{2 \leq x \wedge x \leq 3} &= \overline{2 \leq x} \vee \overline{x \leq 3} \\ &= 2 > x \vee x > 3. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist sicher das von uns Erwartete, nämlich alle Zahlen außerhalb des abgeschlossenen Intervalls [2, 3].

3.3.2 Aufgaben

1. Weisen Sie die Regeln (3.12.) - (3.15) und (3.18) mittels entsprechender Tabellen nach!

2. Finden Sie auf der Grundlage der Regeln von De Morgan eine äquivalente Formulierung:

   (a) Es ist nicht wahr, dass die Zahl x durch 2 und durch 3 teilbar ist.

   (b) Es ist nicht wahr, dass die Maschinen M1, M2, M3 ausfallen.

   (c) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht ganzzahlig und nicht rational.

3. Lösen Sie die Ungleichung $\frac{3x}{x+1} \leq |x-4|$ vollständig.

Lösungen zu den Aufgaben

2. (a) „x ist nicht 2 oder durch 3 teilbar“ ,
   (b) „Maschine M1 oder M2 oder M3 fällt nicht aus“,
   (c) „Es ist nicht wahr, dass $\sqrt{2}$ ganzzahlig oder rational ist“.

3. Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{x | x \leq -2 \vee -1 < x \leq 2 \vee x \geq 3 + \sqrt{13}\}$.

Hilfen zu den Aufgaben

1. Setzen Sie die Wahrheitswerte W, F (alle möglichen Belegungen) in die Gleichungen ein und berechnen Sie mit Hilfe der entsprechenden Tabellen die linken und rechten Seiten einer Gleichung, z.B. (3.18):

$$\begin{aligned} \overline{pq} &= \overline{p} \vee \overline{q} \\ \overline{WW} &= \overline{w} \vee \overline{W} \\ \overline{W} &= F \vee F \\ F &= F \vee F = F \end{aligned}$$

2. (a) $p(x) =$ „x ist durch 2 teilbar“ ,
   $q(x) =$ „x ist durch 3 teilbar“ ,
   $p(x) \wedge q(x) =$ „x ist durch 2 und x ist durch 3 teilbar“;
   $\overline{p(x) \wedge q(x)} =$ „Es ist nicht wahr, dass ... “ ,
   das ist aber gleich $\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)} =$ „x ist nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar“.

3. 2. Fall: $x \neq -1$ **und** $x \geq 4)$ **und** $x + 1 < 0$.
   Aus diesen konjunktiv zusammengesetzten Bedingungen folgt der Grundbereich $\mathcal{I} = \emptyset$. Damit ist $\mathcal{L}_2 = \emptyset$.
   3. Fall: $x \neq -1$ **und** $x < 4$ **und** $x + 1 > 0$.
   Dann folgt die Ungleichung

$$\frac{3x}{x+1} \leq -x + 4 \quad (-1 < x < 4),$$

   die schließlich auf $|x| \leq 2$ führt, was mit Berücksichtigung des Grundbereichs bedeutet, dass $\mathcal{L}_3 = (-1, 2]$.

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

2. (b) Sei $p_i =$ „Maschine i (i=1,2,3) fällt aus“. Dann hat die gegebene Aussage formal die Form $\overline{M_1 \wedge M_2 \wedge M3}$. Dem ist äquivalent $\overline{M_1} \vee \overline{M_2} \vee \overline{M_3}$, d.h. „M1 oder M2 oder M3 fällt nicht aus“ .
   (c) Sei $p =$„$\sqrt{2}$ ist nicht ganzzahlig“, $q =$ „$\sqrt{2}$ ist nicht rational“.
   Die gegebene Aussage hat formal die Form $p \wedge q$. Mit (3.1) ist aber $pq = \overline{\overline{pq}}$. Wendet man den inneren Negationsstrich auf pq an und berücksichtigt (3.18), so hat man zusammengefasst $pq = \overline{\overline{pq}} = \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$, verbal „Es ist nicht wahr, dass $\sqrt{2}$ ganzzahlig oder rational ist“.

3. 3. Fall: $x \neq -1$ **und** $x < 4$ **und** $x + 1 > 0$.
   Dann folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x+1} &\leq -x + 4, \quad -1 < x < 4 \\
3x &\leq (x+1)(-x+4) \\
3x &\leq -x^2 + 4x - x + 4 \\
0 &\leq 4 - x^2 \\
x^2 &\leq 4 \\
|x| &\leq 2.
\end{aligned}$$

   Daraus folgt unter Berücksichtigung des Grundbereichs die Teillösungsmenge $\mathcal{L}_3 = (-1, 2]$.
   4. Fall: $x \neq -1$ **und** $x < 4$ **und** $x + 1 < 0$, letztlich ist der Grund

bereich alle $x < -1$,

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x+1} &\leq -x+4, \quad x < -1 \\
3x &\geq (x+1)(-x+4), \quad \text{beachte x+1} < 0 \text{ ,} \\
3x &\geq -x^2+4x-x+4 \\
0 &\geq 4-x^2 \\
x^2 &\geq 4 \\
|x| &\geq 2.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung des Grundbereichs entfällt $x \geq 2$ und mithin $\mathcal{L}_4 = (-\infty, -2]$. Fasst man nun *alternativ* alle Teillösungen zusammen, so erhält man

$$\mathcal{L} = \{x|x \leq -2 \vee -1 < x \leq 2 \vee x \geq 3 + \sqrt{13}\}.$$

3.4 Die Implikation und Äquivalenz

3.4.1 Grundlagen

> Die Aussage $p \Longrightarrow q$ (lies „wenn p, so q“), die die Verknüpfung zweier Aussagen p, q darstellt, nennt man **Implikation**, die dann und nur dann *falsch* ist, wenn p wahr und q falsch ist.
> Man nennt p dabei die *Prämisse* und q die *Konklusion (Conclusio)*.

Der Gebrauch von Negation, Alternative, Konjunktion entspricht im Wesentlichen dem üblichen Sprachgebrauch. Gegen die Festlegung der Implikation sind jedoch, insbesondere von Philosophen, häufig Bedenken angemeldet worden. Man muss aber feststellen, dass die so definierte Implikation genau den Sprachgebrauch der klassischen Mathematik wiedergibt. Die Implikation „wenn p, so q“ verwendet man stets synonym mit „nicht p oder q“ , die zuletzt genannte Aussage ist insbesondere dann wahr, wenn die Aussage „nicht p“ wahr , also p falsch ist.

Während im Allgemeinen mit der Implikation keine Beziehung von Grund und Folge bezeichnet werden soll, hat sie jedoch bei realen Anwendungen in der Mathematik diese Eigenschaft. Denn im Falle der Richtigkeit von $p \Longrightarrow q$ und dem Bestehen von p kann auf das Bestehen von q geschlossen werden (vgl. Zeile 1 der Tabelle 3.4).

In Tabellenform:

Die Motivation für obige Tabelle soll noch an Beispielen demonstriert werden.

Beispiel
Ein Grundgesetz der Arithmetik lautet:

> Für alle reellen Zahlen x,y,z gilt: Wenn x < y und y < z , so x < z.
> Kurzform:$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Longrightarrow x < z$.

p	q	$p \Longrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Tabelle 3.5: Implikation

Für jede Wahl von konkreten reellen Zahlen x, y, z geht die Aussageform

$$x < y \wedge y < z \Longrightarrow x < z.$$

in eine wahre Aussage über.
Demnach sind folgende Aussagen wahr:

$1 < 2 \wedge 2 < 3 \Longrightarrow 1 < 3$ (Zeile 1 der Tabelle 3.5)
$3 < 2 \wedge 2 < 4 \Longrightarrow 3 < 4$ (Zeile 3 der Tabelle 3.5)
$3 < 2 \wedge 2 < 2 \Longrightarrow 3 < 2$ (Zeile 4 der Tabelle 3.5)

Zur zweiten Zeile der Tabelle betrachten wir die Aussage: „Wenn $1 = 1$, so $1 = -1$“. Die Prämisse ist wahr, die Konklusion falsch. Es ist nicht sinnvoll in diesem Falle die Implikation als wahr anzusehen, denn man könnte argumentieren: Wenn $1 = 1$ ist, so ist $1 = -1$; da aber in der Tat 1 = 1 , so ist auch 1 = - 1.

> Eine Implikation ist dann und nur dann eine falsche Aussage, wenn die zugehörige Prämisse wahr, die Konklusion jedoch falsch ist.
> Jede Implikation mit falscher Prämisse ist eine wahre Aussage. Man kann also aus einer falschen Voraussetzung jede beliebige Folgerung ziehen.
> Jede Implikation mit wahrer Conclusio ist wahr. [2]

Andere Redeweisen für die Implikation $p \Longrightarrow q$ sind:

„Aus p folgt q “
„p ist eine hinreichende [3] Bedingung für q“
„q ist eine notwendige [4] Bedingung für p “

Beispiel
$\forall x \in \mathbb{R}$: $x < 0 \Longrightarrow |x| = -x$
a) „ Aus $x < 0$ folgt $|x| = -x$ “

[2] Viele Sätze der Mathematik nutzen gerade die Tatsache, dass eine Implikation mit falscher Prämisse wahr ist. Ein einfaches Beispiel ist die Behauptung, dass die leere Menge $\emptyset$ Teilmenge jeder beliebigen Menge $\mathcal{A}$ ist. Es gilt für jedes x: “ Wenn $x \in \emptyset$, so $x \in \mathcal{A}$“. Das gilt nur deshalb, weil die Voraussetzung $x \in \mathcal{A}$ für jedes x falsch ist.

[3] Hinreichend im Sinne: es reicht aus.

[4] Notwendig im Sinne: wenn $|x| = -x$nicht erfüllt, so ist auch $x < 0$ nicht erfüllt.

b) „ $x < 0$ ist eine hinreichende Bedingung für $|x| = -x$
c) „$|x| = -x$ ist eine notwendige Bedingung für $x < 0$“

Der spezielle Fall, dass $p \Longrightarrow q$ als auch $q \Longrightarrow p$ wahr sind, wird durch eine gesonderte Ausdrucksweise gekennzeichnet.

> Die Aussage $p \Longleftrightarrow q$ (lies „p genau dann, wenn q bzw. p dann und nur dann, wenn q“), die die Verknüpfung zweier Aussagen p, q darstellt, nennt man **Äquivalenz**, die dann und nur dann *wahr* ist, wenn p, q beide wahr oder p, q beide *falsch* sind.

In Tabellenform:

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Tabelle 3.6: Äquivalenz

Eine andere Redeweise für $p \Longleftrightarrow q$ ist: „ p ist hinreichend und notwendig für q“.

Beispiel

1. $\forall x \in \mathbb{R}$:$x < 1 \Longleftrightarrow x + 3 < 4$
   Denn es gilt: $x < 1 \Longrightarrow x + 3 < 4$ und umgekehrt: $x + 3 < 4 \Longrightarrow x < 1$.

2. Es gilt zwar für jedes x: $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9$, jedoch *nicht* die Umkehrung: $x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3$; z.B. für $x = -3$ ist die Prämisse richtig, nicht die Behauptung.
   Wahr ist deshalb die Implikation: $x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3 \vee x = -3$.
   Hier gilt auch die Umkehrung, deshalb: $x^2 = 9 \Longleftrightarrow x = 3 \vee x = -3$.

3. Beim Rechnen mit Gleichungen entstehen oft *Ketten äquivalenter Gleichungen*. Sei eine exakt lösbare Gleichung $g(x) = 0$ vorgegeben. "Èxakt“ soll heißen, dass die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$ mit endlich vielen Rechenoperationen ermittelbar ist. Das heißt auf die Ausgangsgleichung $g(x) = 0$ wird eine Rechenoperation angewandt, die die Aussageform $p_0(x)$: $g(x) = 0$ in eine äquivalente Aussageform $p_0(x) \Longleftrightarrow p_1(x)$ überführt, also $\mathbb{L} = \{x | p_1(x)\}$. Der Vorgang setzt sich schrittweise fort: $p_0(x) \Longleftrightarrow p_1(x) \Longleftrightarrow p_2(x) \cdots \Longleftrightarrow p_n(x)$, wobei $p_n(x)$ eine Aussageform sein muss, aus der man dann die Lösung ablesen kann, in der Regel die Form $p_n(x) : x = a$, falls es nur diese Lösung gibt.

Beispielsweise sei die Lösungsmenge folgender Gleichung gesucht:

$$\begin{aligned} p_0(x) : (x-2)(x+2) - x^2 - 2x - 6 &= 0 \\ \Longleftrightarrow p_1(x) : (x-2)(x+2) &= x^2 + 2x + 6 \\ \Longleftrightarrow p_2(x) : x^2 - 4 &= x^2 + 2x + 6 \\ \Longleftrightarrow p_3(x) : 2x &= -10 \\ \Longleftrightarrow p_4(x) : x &= -5, \quad \text{mithin } \mathbb{L} = \{-5\}. \end{aligned}$$

Üblicherweise notiert man nur

$$\begin{aligned} (x-2)(x+2) - x^2 - 2x - 6 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= x^2 + 2x + 6 \\ x^2 - 4 &= x^2 + 2x + 6 \\ 2x &= -10 \\ x &= -5. \end{aligned}$$

Doch sollte man die vollständige Form immer im Hinterkopf haben!
Ein warnendes Gegenbeispiel, denn nicht immer ist jede folgende Gleichung der vorhergehenden äquivalent, da manche Rechenoperationen eben keine äquivalente Umformung sind, wenn man gewisse Voraussetzungen nicht beachtet. Der typische, bei Anfängern oft zu beobachtende Fehler ist der Umgang mit der *Quadratur einer Gleichung*.
So hat man z.B.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+7} &= x + 2, \quad \text{durch Quadratur erhält man} \\ 2x + 7 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x &= 1) \vee (x = -3). \end{aligned}$$

Macht man die Probe, also prüft, für welche x die Ausgangsgleichung in eine wahre Aussage übergeht , so stellt man fest, dass das nur bei $x = 1$ zutrifft; bei $x = -3$ [5] ensteht die falsche Aussage 1 = - 1, die durch Quadratur in die wahre Aussage 1 = 1 (Zeile ($\star$)). übergeht. Die Umkehrung gilt nicht: aus 1 = 1 folgt nicht durch *Wurzelziehen* 1 = - 1. Es gilt eben durchgängig nicht die „Äquivalenz“, sondern

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+7} &= x + 2 \\ \Longrightarrow 2x + 7 &= x^2 + 4x + 4 (\star) \\ \Longleftrightarrow x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \Longleftrightarrow x &= 1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Es gilt zwar:

$$x = y \Longrightarrow x^2 = y^2, \quad \text{x, y reell,}$$

[5] Löst die Gleichung $-\sqrt{2x+7} = x + 2$.

jedoch *nicht*

$$x^2 = y^2 \Longrightarrow x = y,$$

sondern

$$x^2 = y^2 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Longleftrightarrow |x| = |y| \Longleftrightarrow x = y \vee x = -y.$$

Weiß man, dass x, y $>$0, so gilt stets: $x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y$.

> Quintessenz:
> Die Quadratur einer Gleichung ist grundsätzlich keine äquivalente Umformung, da aus einer falschen Aussage eine wahre Aussage enstehen kann [6]. Die Probe weist den Weg zur Lösungsmenge.

Es gilt folgende Vorrangregel: *nicht; und; oder; wenn - so; genau dann,wenn* . Beispielsweise muss der Ausdruck $p \vee q \wedge r \Longrightarrow q \Longleftrightarrow r$ folgendermaßen interpretiert werden:
$((p \vee (q \wedge r) \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow r.$

Rechenregeln:

$$(p \Longrightarrow q) = (\overline{p} \vee q) \tag{3.19}$$

$$(p \Longrightarrow q) = (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \quad (Kontraposition) \tag{3.20}$$

$$(p \Longleftrightarrow q) = [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \tag{3.21}$$

Bedeutsam ist die Kontraposition. Will man die Implikation $p \Longrightarrow q$ beweisen, so kann man auch logisch äquivalent (gleichwertig) den Beweis für $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ antreten. Wir werden im nächsten Abschnitt darauf zurückkommen.

3.4.2 Aufgaben

1. Bestätigen Sie (3.19 - 3.21)!

2. Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen, falls sie solche darstellen:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x < 4 \Longrightarrow 2x < 8.$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} : x < 4 \Longleftrightarrow 2x < 8.$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x < 0.$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ln x < 0 \Longrightarrow x < 1.$
   (e) $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \ln x = \ln \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow x < 0.$

[6] Die Implikation ist zwar formal auch dann wahr, aber an solchen Konstellationen kann man bei mathematischen Aussagen nicht interessiert sein.

3. Setzen Sie in den freien Stellen der nachstehenden Aussageformen „notwendig“ bzw. „hinreichend“ ein:
„ $x < 2 \wedge y < 3$ ist ... für $x + y < 5$ “ .
„ $x < 0$ ist ... für $sqrtx^2 = |x|$“.
„ Die Stetigkeit einer Funktion f an einer stelle x_0 ist ... für ihre Differenzierbarkeit an dieser Stelle“.

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung
$\sqrt{2x+5} - \sqrt{13-6x} = \sqrt{37-6x}, x \in \mathbb{R}$.

Lösungen zu den Aufgaben

2 a) wahr, b) wahr, c) wahr, d) wahr, e) keine Aussage.

3. „hinreichend“, „hinreichend„, „notwendig“.

4. $\mathbb{L} = \{2\}$.

Hilfen zu den Aufgaben

1. Zum Beispiel (3.19):$(p \Longrightarrow q) = (\overline{p} \vee q)$;
$p = q = W : W \Longrightarrow W = W$; $\overline{W} \vee W = F \vee W = W$;
$p = q = F : F \Longrightarrow F = W$; $\overline{F} \vee F = W \vee F = W$;
$p = W; q = F$: $W \Longrightarrow F = F$; $\overline{W} \vee F = F \vee F = F$;
$p = F; q = W$: $F \Longrightarrow W = W$; $\overline{F} \vee W = W \vee W = W$.

2. (a) Sie müssen zwei Fälle unterscheiden. Einmal sei $x \geq 4$, zum anderen $x < 4$.
   (b) Es ist zu prüfen, ob die Implikation auch in umgekehrter Richtung gilt.
   (c) Wie stehts mit dem Wahrheitswert der Prämisse?
   (d) bzw. (e) Achten Sie auf den Definitionsbereich der ln – Funktion!

3. Bedenken Sie den Sachverhalt in der Form $p \Longrightarrow q$!

4. Die Gleichung zunächst quadrieren [7], dann die verbleibenden Wurzelausdrücke auf einer Seite isolieren und nochmal quadrieren.

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

2 (a) Man muss sich überlegen, ob die Aussageform $x < 4 \Longrightarrow 2x < 8$ für jedes reelle x in eine wahre Aussage übergeht. Setzt man Zahlen $x \geq 4$ ein, so ist die Prämisse stets falsch, dann ist aber die Implikation definitionsgemäß stets wahr. Diese Überlegung ist bei den folgenden Aufgaben relevant, aber nicht interessant und kann deshalb in Zukunft unterbleiben.
Benutzt man Werte $x < 4$ (Prämisse stets wahr), so entsteht durch die äquivalente Umformung „Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl“ eine wahre Aussage $x < 8$. Damit ist insgesamt die gegebene Implikation wahr.

[7] Wenden Sie die binomische Formel auf der linken Seite der Gleichung richtig an: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, **nicht** wie häufig zu beobachten: $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.

(b) Da auch umgekehrt aus der Prämisse $2x < 8$ durch Division mit der Zahl 2 eine wahre Konklusion $x < 4$ entsteht, ist die Äquivalenz wahr.

(c) Da die Prämisse für alle reelle x falsch ist – Lösungen sind $x = \pm i$ –, trifft die Implikation für jedes reelle x zu.

(d) Die Aussage ist wahr, weil für alle x mit $0 < x < 1$ der Funktionswert $\ln x < 0$ ist $(W \Longrightarrow W)$, und für alle $x \geq 1$ ist $\ln x \geq 0$ $(F \Longrightarrow F)$.

(e) Es liegt keine Aussage vor, da $\ln x$ für $x < 0$ nicht definiert ist. Man kann also nicht sinnvoll behaupten, dass sein Inhalt wahr oder falsch ist.

3. $x < 2 \wedge y < 3$ ist *hinreichend* für $x + y < 5$, denn die zugehörige Implikation lautet:
   $x < 2 \wedge y < 3 \Longrightarrow x + y < 5$; $x < 0$ ist *hinreichend* für $\sqrt{x^2} = |x|$, denn $x < 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = |x|$.
   Die Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist notwendig für die Differenzierbarkeit an dieser Stelle, denn der Satz lautet: Wenn f differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.
   Denken Sie z.B. an die Betragsfunktion $f(x) = |x|$. Sie ist in $x_0 = 0$ stetig (ununterbrochener Kurvenverlauf), aber nicht dort differenzierbar (Anlegen einer eindeutigen Tangente an eine Spitze ist nicht möglich).

4.

$$
\begin{array}{rcl}
2\sqrt{2x+5} - \sqrt{13-6x} & = & \sqrt{37-6x} \quad \text{(Quadratur)} \\
\Longrightarrow 4(2x+5) - 4\sqrt{2x+5}\sqrt{13-6x} + 13 - 6x & = & 37 - 6x \\
\Longleftrightarrow -4\sqrt{2x+5}\sqrt{13-6x} & = & -8x + 4 \\
\Longleftrightarrow \sqrt{2x+5}\sqrt{13-6x} & = & 2x - 1 \quad \text{(Quadratur)} \\
\Longrightarrow (2x+5)(13-6x) & = & (2x-1)^2 \\
\Longleftrightarrow -16x^2 - 64 & = 60 & \\
\Longleftrightarrow x^2 & = & 4 \\
\Longleftrightarrow (x & = & 2) \vee (x = -2)
\end{array}
$$

Probe (stets an der Ausgangsgleichung!): Nur $x = 2$ erfüllt die Ausgangsgleichung, also $\mathbb{L} = \{2\}$.

Kapitel 4

Beweisverfahren

Eine mathematische Theorie besteht aus einer endlichen Menge von wahren Aussagen. Man nennt diese Aussagen auch *Sätze der Theorie*, etwa aus der Algebra: „Wenn das Produkt zweier Zahlen Null ist, so ist mindestens eine der Zahlen Null“, kurz : $\forall x, y(x \cdot y = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0)$. Alle Sätze einer Theorie lassen sich in zwei disjunkte Teilmengen zerlegen, die Menge der Postulate (Axiome) und die Menge der Theoreme [1] . Postulate sind Aussagen, die a priori gelten, die jeder einsieht. Sie werden nicht bewiesen.Oft sind es einfache Erfahrungstatsachen. Diese Vorgehensweise ist praktikabel, denn man kann nicht uferlos auf vorherige Aussagen zurückgreifen. Sie werden an den Beginn einer Theorie gestellt und sind gering in ihrer Anzahl. Welche Aussagen einer Theorie Postulate sind, ist nicht eindeutig. Dies hängt von vielen Faktoren ab, die hier aber nicht weiter beleuchtet werden sollen.

So konkurrierten für die Theorie der natürlichen Zahlen mehrere Postulatmengen (Axiomensysteme).Das bekannteste Axiomensystem stammt von PEANO (1891):

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger n'.
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist.
4. Die Nachfolger zweier voneinander verschiedener Zahlen sind voneinander verschieden.
5. Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Mit Hilfe dieser 5 Axiome können die Addition, die Multiplikation und die Ordnungsrelationen erklärt und schließlich alle bekannten Rechenregeln abgeleitet werden.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie bevorzugt man das Axiomemsystem von KOLMOGOROFF:

[1] Je nach Bedeutung einer Aussage spricht man vom Lehrsatz (kurz: Satz), Folgerung, Hilfssatz, Lemma.

Es sei $(\Omega, \mathbb{A})$ [2] ein messbarer Raum. Eine Funktion $P : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $(\Omega, \mathbb{A})$, wenn gilt:

(Axiom 1)	$0 \leq P(\mathcal{A}) \leq 1$ für alle $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$
(Axiom 2)	$P(\Omega) = 1$
(Axiom 3)	Für jede Folge $(A_i)_i \in \mathbb{N}$ von paarweisen disjunkten Ereignissen gilt: $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$.

Hieraus lassen sich alle Theoreme der Wahrscheinlichkeitstheorie ableiten.
Alle Theoreme müssen sich aus den Postulaten und den bereits bewiesenen Theoremen (Sätzen) ableiten lassen. Um ein erstes Theorem T_1 zu beweisen, dürfen nur die Postulate verwendet werden. Ist T_1 bewiesen, kann man T_2 mit Hilfe der Postulate und T_1 ableiten u.s.w.

Beispiele

1. Die *Addition* natürlicher Zahlen lässt sich auf der Grundlage der Peanoschen Axiome *induktiv* definieren [3] , und zwar mittels der *Rekursionsgleichungen*: $m + 0 = m$ und $m + n' = (m + n)'$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$. Bezeichnet man den unmittelbaren Nachfolger der Zahl 0, also die Zahl 0', mit 1, die mit 1' = 0" = 2 , ..., so stellt sich sofort heraus, dass $m' = m + 1$ ist, da $m + 1 = m + 0' = (m + 0)' = m'$. Dann ist etwa $1 + 1 = 1 + 0' = (1 + 0)' = 1' = 2$. Weiter lässt sich induktiv das Kommutativ - und Assoziativgesetz beweisen.

2. Das *Axiomensystem der reellen Zahlen*
   Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen kann durch folgende Axiome charakterisiert werden [4]:

   (A) Axiome der Addition

   1. Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a, b gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $a + b$, die *Summe* von a und b genannt; a und b heißen *Summanden.*

   2. Kommutativgesetz der Addition
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a.$

   3. Assoziativgesetz der Addition
   $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c.$

   4. Existenz der Null als neutrales Element der Addition
   Es existiert eine Zahl 0 (Null), so dass gilt: $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a.$

---

[2] Ω ist eine nichtleere Menge; $\mathbb{A}$ eine σ - Algebra, d.h. a) $\Omega \in \mathbb{A}$, b) $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}$.c) Für jede Folge $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathbb{A}$ ist auch die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ ein Element von $\mathbb{A}$.

[3] Vgl. Abschnitt 4.4.

[4] Das Intervallschachtelungsaxiom und das Axiom von Archimedes werden weggelassen, da sie in den weiteren Betrachtungen keine Rolle spielen.

5. Existenz des *inversen* Elements
$\forall a \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : a + x = 0;$
$x = -a$ ist das zu a inverse (entgegengesetzte) Element.

(B) Axiome der Multiplikation

1. Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a, b gibt es genau eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $a \cdot b$, kurz: ab, das *Produkt* von a und b genannt; a und b heißen *Faktoren*.

2. (Kommutativgesetz der Multiplikation)
$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a.$

3. Assoziativgesetz der Multiplikation
$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(bc) = (ab)c.$

4. Existenz der Zahl 1 als neutrales Element
der Multiplikation
Es existiert eine Zahl 1 (Eins), so dass gilt: $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a.$

5. Existenz des *inversen* Elements
$\forall a \neq 0 \exists x \in \mathbb{R} : ax = 1;$
$x = a^-1 = \frac{1}{a}$ heißt das zu a inverse (reziproke) Element.

6. Distributivgesetz der Multiplikation
$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac.$

(C) Axiome der Anordnung

1. Zwischen zwei reellen Zahlen a, b besteht genau eine der drei Beziehungen $\qquad a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$

2. Transitivität
$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c.$

3. Monotonie der Addition
$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Longrightarrow a + c < b + c.$

4. Monotonie der Multiplikation
$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc.$

Auf dieser Grundlage zeigen wir :

Satz 1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R} : a + x = b, \quad x$ *heißt* Differenz $b - a$.

Beweis 1. *Nach (A) 5. existiert zu a das inverse Element $-a$*

mit $a + (-a) = 0$, *andererseits gilt mit (A) 4:*

$$\begin{aligned} 0 + b = 0 \Longrightarrow & \quad a + (-a) + b = b \\ \Longrightarrow & \quad a + \underbrace{(-a + b)}_{x} = b \quad (nach (A) 3.) \\ \Longrightarrow & \quad x = b - a \text{ hat die gewünschte Eigenschaft,} \end{aligned}$$

q.e.d. [5]

Das es *genau* eine derartige Zahl x gibt, zeigen wir später mit Hilfe des indirekten Beweises.

Satz 2. $\forall a \in \mathbb{R} : -(-a) = a.$

Beweis 2. *Zu* $-a$ *existiert mit (A) 5. ein inverses Element* $-(-a)$, *wobei* $-a + (-(-a)) = 0$ $(\star)$, *andererseits gilt mit Satz 1 die eindeutige (noch nicht bewiesen) Lösbarkeit der Gleichung* $-a + x = 0$, *also speziell auch* $(-a) + a = 0$ $(\star\star)$. *Vergleicht man nun die Gleichungen* $(\star)$ *mit* $(\star\star)$, *so folgt* $a = -(-a)$.

3. Auf der Grundlage des Axiomensystems von KOLMOGOROFF zeigt man etwa folgende einfachen Rechenregeln:

Satz 3. *Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist Null, d.h.* $P(\emptyset) = 0$.

Beweis 3. *Da* $\emptyset \in \mathbb{A}$, *existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $P(\emptyset)$ *(Axiom 1). Sei* $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ *und* $\mathcal{A} \neq \emptyset$, *dann ist auch* $\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A} \in \mathbb{A}$ *und* $\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$, *was mit Axiom 3 heißt:* $P(\mathcal{A} \cup \emptyset) = P(\mathcal{A}) + P(\emptyset) = P(\mathcal{A})$. *Also muss* $P(\mathcal{A}) = 0$ *sein.*

Satz 4. *Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse* $\mathcal{A}$ *und „nicht* $\mathcal{A}$*“* $(\overline{\mathcal{A}})$ *ist gleich 1:* $P(\mathcal{A}) + P(\overline{\mathcal{A}}) = 1$.

Beweis 4. *Mit* $\mathcal{A}$ *ist auch aufgrund der Eigenschaften einer* σ *- Algebra* $\overline{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}$. *Deshalb existiert nach Axiom 1 Das Wahrscheinlichkeitsmaß* $P(\overline{\mathcal{A}})$. *Wegen* $\mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{A}} = \Omega$ *und* $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}} = \emptyset$ *ergibt sich mit den Axiomen 2 und 3 die Behauptung:*
$P(\mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{A}}) = P(\mathcal{A}) + P(\overline{\mathcal{A}}) = P(\Omega) = 1.$

[5] q.e.d. steht für *quod erat demonstrandum* (lat.) = *was zu beweisen war* (auch: w.z.b.w.).

Ein Beweis besteht aus einer logischen Folge von Aussagen (Behauptungen). Dabei muss sichergestellt sein, dass man von einer wahren Aussage wieder auf eine wahre Aussage schließt. Oder anders ausgedrückt: Ein Beweis ist die Ableitung einer Aussage (Behauptung) aus einer oder mehreren Aussagen, den Voraussetzungen. [6]

Beim logischen Schließen helfen im Rahmen eines Beweises sogenannte *Schlussregeln*. Von denen verlangt man grundsätzlich, dass es sich um strukturelle Umformungen von Aussagen handelt, die von wahren Aussagen stets wieder zu wahren Aussagen führen.

Es zeigt sich, dass in der Mathematik einige sehr einfache Schlussregeln genügen:

Abtrennungsregel	$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$	(4.1)
Kettenschluss :	$((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	(4.2)
Indirekter Beweis :	$(q \wedge (\overline{p} \Longrightarrow \overline{q})) \Longrightarrow p$	(4.3)
Kontraposition :	$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$	(4.4)
	$(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$	(4.5)
Schluss auf Äquivalenz :	$((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$	(4.6)

Die Regel (4.1) hat dabei eine zentrale Bedeutung, da sie fast bei jedem Beweis implizit verwendet wird.

In der Differentialrechnung kennt man den Satz: „Wenn f in x_0 differenzierbar (p), so ist f in x_0 stetig (q)“. Eine zur Untersuchung konkret vorgegebene Funktion f ist nachweislich in x_0 differenzierbar, also schließt man auf die Stetigkeit von f in x_0.

Im täglichen Leben benutzen wir sie eher unbewusst. Jeder sieht folgende Aussage ein:„Wenn es regnet, so ist die Straße nass“ ($p \Longrightarrow q$). Nun regnet es (p) zu einem bestimmten Zeitpunkt, also schließt man daraus, dass die Straße nass wird (q).

Weiß man, dass die Implikation $p \Longrightarrow q$ wahr ist und p gilt, so darf man auf die Gültigkeit von q schließen.

Die folgende Tabelle zeigt, dass der Ausdruck $p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$ stets wahr ist.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$p \wedge (p \Longrightarrow q)$	$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

Tabelle 4.1: Abtrennungsregel

Derartige Aussagen nennt man *Tautologien* [7], also stets wahre Aussagen,

[6] Bei den obigen Beweisen gehören zu den Voraussetzungen – neben den Axiomen – die bereits als bewiesen anerkannten Rechenregeln der Ereignisalgebra.

[7] Zwei logische Ausdrücke p, q nennt man *logisch gleichwertig*, in Zeichen: $p = q$, falls $p \Longleftrightarrow q$ eine Tautologie ist.

unabhängig von der Belegung für p, q. Alle Schlussregeln sind Tautologien!
Achtung: Man darf nicht allein von der Gültigkeit von $p \Longrightarrow q$ auf q schließen [8], z.B. „ Wenn $0 = 1$, so $1 = 2$ “. Aufgrund der Festlegung der Implikation ($F \Longrightarrow F = W$) ist die Aussage wahr, aber $1 = 2$ falsch.

Steht man vor der Aufgabe, einen Beweis zu führen, so fehlt einem häufig eine Beweisidee. Wo setze ich an? Von welchen Voraussetzugen gehe ich aus? Welche Gebiete der Mathematik spielen eventuell eine Rolle? Dann ist zunächst schon hilfreich, wenn man nach einem bestimmten Beweisverfahren Ausschau halten kann; das wären: *der direkte Beweis, der indirekte Beweis* und der Induktionsbeweis.

Die Wahrheit einer Aussage kann man nicht mit beliebig vielen Beispielen nachweisen. Das Beispiel ist nur eine gewisse Plausibilitätsbetrachtung und dient dem Grundverständnis einer gemachten Aussage. Das Verstehen eines vorgegeben Beweises bzw. ein selbstgeführter Beweis führen erst zum generellen Verstehen des untersuchten Tatbestandes.

Nur dann ist das Beispiel – das berühmte Gegenbeispiel – zu Beweiszwecken geeignet, wenn man zeigen möchte, dass der Sachverhalt nicht allgemein gilt: es werde $p = \forall x : p(x)$ behauptet, dann genügt es (mindestens) ein x zu finden, für das p falsch ist.

4.1 Der direkte Beweis

4.1.1 Grundlagen

> Beim *direkten* Beweis wird aus Axiomen, bereits daraus bewiesenen Sätzen und die als wahr angenommenen Voraussetzungen mittels gültiger Schlussregeln nach endlich vielen Schritten die Behauptung gefolgert.

Dieses Verfahren ist wohl das am meisten angewendete. Die bisher geführten Beweise sind Beispiele für direkte Beweise.

Es ist zweckmäßig, eine gegebene Aussage in eine Implikation umzuwandeln, sofern das inhaltlich gerechtfertigt ist. Einerseits kann man die als wahr angenommene Voraussetzung zu den anderen wahren Sätzen hinzufügen, andererseits sind auf der Grundlage der Regeln (3.19) - (3.21) logisch gleichwertige Umformungen möglich, die das Beweisen erleichtern können.

Beispiele

Satz 5. $\forall x, y, a \in \mathbb{R} : x = y \Longrightarrow x + a = y + a.$

beweis Es sei $x = y$ (Annahme:die Voraussetzung gilt).
Es gilt die Identität: $x = x$, also auch $x + a = x + a \quad (\star)$.
Ersetzt man laut Voraussetzung auf der rechten Seite der Gleichung $(\star)$ x durch y, so folgt die Behauptung.

[8] $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$ ist keine Tautologie.

Satz 6. *Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn n gerade , so ist n^2gerade; kurz:* $\forall n \in \mathbb{N}$: *n gerade* $\Longrightarrow n^2$ *gerade.*

Beweis 5. *Es sei n gerade, d.h.* $n = 2k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$. *(Aussage p)*

$$\begin{aligned} n = 2 \cdot k \quad &\Longrightarrow \quad n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 \quad (p_1) \\ &\Longrightarrow \quad n^2 = 2 \cdot \underbrace{(2 \cdot k^2)}_{k'} \quad (p_2) \\ &\Longrightarrow \quad n^2 = 2 \cdot k' \quad \text{(k' ist wieder natürliche Zahl)} \quad (p_3) \\ &\Longrightarrow \quad n^2 \quad \text{ist gerade.} \quad (q) \end{aligned}$$

Hier wurde der Kettenschluss benutzt:
$((p \Longrightarrow p_1) \wedge (p_1 \Longrightarrow p_2) \wedge (p_2 \Longrightarrow p_3) \wedge (p_3 \Longrightarrow q)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

Satz 7. *Wenn* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, *so* $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

Beispielsweise sei die Grundmenge $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\mathcal{A} = \{1, 2\} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}} = \{3, 4, 5\}$; $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\} \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}} = \{4, 5\}$.

Beweis 6. *Es sei also* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\star)$ *(Voraussetzung), d.h.* $x \in \mathcal{A} \Longrightarrow x \in \mathcal{B}$. *Dann ist zu zeigen:* $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, *d.h.* $x \in \overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow x \in \overline{\mathcal{A}}$. *Die Prämisse* $x \in \overline{\mathcal{B}}(\star\star)$ *nehmen wir zur Voraussetzung* $(\star)$ *hinzu* [9] *und aus beiden Voraussetzungen schließen wir auf* $x \in \overline{\mathcal{A}}$. *Aus* $(\star)$ *folgt, dass für jedes x gilt:* $x \in \mathcal{A} \Longrightarrow x \in \mathcal{B}$. *Es sei nun ein spezielles* $x \in \mathcal{A}$, *so folgt mit der Abtrennungsregel der Schluuss* $x \in \mathcal{B}$. *Das ist jedoch ein Widerspruch zu* $(\star\star)$, *also folgt die Behauptung* $x \in \overline{\mathcal{A}}$.

Satz 8. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ [10]: $x \neq y \Longrightarrow \frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y}$. [11]

Beweis 7.

$$\begin{aligned} \textit{Es sei} \quad x \neq y \quad &\Longrightarrow \quad (x - y)^2 > 0 \\ &\Longrightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 > 0; \quad (+4xy) \\ &\Longrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 > 4xy \\ &\Longrightarrow \quad (x + y)^2 > 4xy \\ &\Longrightarrow \quad (x + y) > 2 \cdot \sqrt{xy}; \quad \textit{(da nach Voraussetzung (x+y)>0)} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

[9] Vgl. Erklärung zum *direkten* Beweis.

[10] Menge aller positiven reellen Zahlen.

[11] Das arithmetische Mittel zweier reeller Zahlen ist größer als ihr geometrisches Mittel.

Anmerkung: : Recht häufig beobachtet man in der Ausbildung folgendes Vorgehen: Man nimmt die Behauptung und rechnet so lange, bis man zur Voraussetzung – oder auch einer anderen bereits bewiesenen Tatsache kommt – und meint, man habe den Satz bewiesen. Aber man kann nicht aus $q \Longrightarrow p$ auf $p \Longrightarrow q$ schließen, denn $(q \Longrightarrow p) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$ ist keine Tautologie, wie man unschwer mittels Tabelle nachprüft. Nach dieser Methodik wird man im Allgemeinen in die Sackgasse geführt. Die Wahrheit liegt aber in der Nähe. Wenn die Voraussetzung eines Satzes informativ etwas dürftig ist, soll heißen: es erwächst daraus keine Beweisidee – was man im Satz 8 durchaus so sehen kann – , dann kann durch Anwendung der Kontraposition (Schlussregel (4.5)) die Information der Voraussetzung auffüllen.
Durch Kontraposition von Satz 8 erhät man:
$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p} : \frac{x+y}{2} \underbrace{\leq}_{!} \sqrt{xy} \Longrightarrow x \underbrace{=}_{!} y$

Gewissermaßen laufen nun alle Schritte des Beweises 8 rückwärts ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy} &\Longrightarrow (x+y)^2 \leq 4xy \\
&\Longrightarrow (x-y)^2 \leq 0 \\
&\Longrightarrow (x-y) = 0; \text{ (das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein)} \\
&\Longrightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Wir greifen Satz 6 wieder auf und fragen, ob auch die Umkehrung des Satzes gilt, also

Satz 9. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *gerade* $\Longrightarrow n$ *gerade .*

Beweis 8. *Man überlegt zuerst, ob die Beweisschritte in Beweis 6 auch eindeutig „rückwärts “ zu führen sind. Das ist hier der Fall, falls man die Wurzeloperation bereits zulässt. Mit der Schlussregel (4.6) ergibt das den*

Satz 10. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *gerade* $\Longleftrightarrow n$ *gerade .*

Gleichwohl wollen wir für die Umkehrung des Satzes, falls man nicht die Wurzeloperation an dieser Stelle akzeptiert, noch einen anderen Beweis liefern, der noch einmal den Einsatz der Kontraposition zum Gegenstand hat.

Beweis 9. *Die Kontraposition von Satz 9 lautet: „ Wenn n ungerade, so ist n^2*

ungerade " .

$$\begin{aligned}
\textit{Es sei } n \textit{ ungerade} &\implies n = 2k+1 (k = 0, 1, 2, \dots) \\
&\implies n^2 = (2k+1)^2 \\
&\implies n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\
&\implies n^2 = 2\underbrace{(k^2+k)}_{k'}+1 \\
&\implies n^2 = 2k' + 1 \\
&\implies \quad n^2 \textit{ ungerade.}
\end{aligned}$$

Satz 11. *a)* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$
b) $\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{A}$
c) $\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$

Die Beweise von Gleichungen der Mengenalgebra basieren auf der Definition der Gleichheit von Mengen:
$\mathcal{A} = \mathcal{B} :=$ [12] $\forall x (x \in \mathcal{A} \iff x \in \mathcal{B})$. $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ist gleichbdeutend mit „Für alle x gilt: $x \in \mathcal{A}$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{B}$" ist eine wahre Aussage. Die Gleichheit von Mengen wird auf die Äquivalenz zweier Aussagen bzw. Aussageformen zurückgeführt. Die Aussageformen $x \in \mathcal{A}$ bzw. $x \in \mathcal{B}$ können je nach Wahl von x aus einem fest definierten Grundbereich entweder wahr oder falsch sein. Damit kann man beim Beweisen derartiger Ausdrücke auf die Rechenregeln von Abschnitt 3 zurückgreifen.

Beweis 10. *a) Zu zeigen:* $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \iff x \in \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$.
$(\Longrightarrow)$

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} &\overset{(def)}{\Longrightarrow} \underbrace{x \in \mathcal{A}}_{p(x)} \vee \underbrace{x \in \mathcal{B}}_{q(x)} \\
&\overset{(3.4)}{\Longrightarrow} x \in \mathcal{B} \vee x \in \mathcal{A} \\
&\overset{(def)}{\Longrightarrow} x \in \mathcal{B} \cup \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ *Die Schritte sind auch rückwärts durchführbar.* *q.e.d.*

b) Zu zeigen: $x \in \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \iff \in \mathcal{A}$.

Da die folgenden Schritte in beiden Richtungen gelten, benutzen wir gleich den Äquivalenzpfeil.

$(\Longleftrightarrow)$

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) &\iff x \in \mathcal{A} \vee (x \in \mathcal{A} \vee (x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \\
&\iff x \in \mathcal{A} \vee (x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}) \\
&\overset{(3.17)}{\iff} x \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

[12] Auch als definierendes Gleichheitszeichen $\overset{\text{def}}{=}$ benutzt.

Wie schon weiter oben festgestellt ist $w(x \in \mathcal{A}) = W$ und $w(x \notin \mathcal{A}) = F$. Damit lassen sich bei bestimmten Gesetzmäßigkeiten auch die Wahrheitstabellen zu Beweiszwecken einsetzen. Für p, q schreiben wir $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und für $\vee, \wedge$ notieren wir $\cup, \cap$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	F
F	F	F	F

Tabelle 4.2: Beweis zu Satz 11 b)

Mengen, deren Spalten zeilenweise übereinstimmen sind gleich (vgl. 1. und 4. Spalte)
c) Zu zeigen: $x \in \mathcal{A} \cap \emptyset \Longleftrightarrow x \in \emptyset$, d.h.
$(x \in \mathcal{A} \wedge x \in \emptyset) \Longleftrightarrow x \in \emptyset$, was offensichtlich eine wahre Aussage ist,
da beide Teilaussagen falsch sind (siehe Tabelle 3.6).
Nachweis in Tabellenform (Die 2. und 3. Spalte stimmen überein):

$\mathcal{A}$	$\emptyset$	$\mathcal{A} \cap \emptyset$
W	F	F
F	F	F

Tabelle 4.3: Beweis zu Satz 11 c)

4.1.2 Aufgaben

Beweisen Sie folgende Sätze! [13]

Satz 12. $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 = 0.$

Satz 13. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + (-a) = a - b.$

Satz 14. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \Longrightarrow a \cdot c = b \cdot c.$

Satz 15. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$

Satz 16. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d \Longrightarrow a + c < b + d.$
(Addition von Ungleichungen)

Satz 17. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d \wedge b, c > 0 \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot d.$
(Multiplikation von Ungleichungen)

Satz 18. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\ \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \end{cases}$
(Monotonie von $\cap, \cup$)

Satz 19. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq A$ *und* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$

Satz 20. *Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige Ereignisse. Dann gilt:*
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Longrightarrow P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B}).$ [14]

Hilfen zu den Aufgaben

1. *Satz 12* Benutzen Sie die Axiome (A)4. und (B) 6.
2. *Satz13* Benutzen Sie (A) 5. und Satz 1; addieren $(-b)$.
3. *Satz 14* Addieren Sie zur Voraussetzung $(-b)$ und multiplizieren Sie mit c.
4. *Satz 15* Beginnen Sie mit (B) 5. und multiplizieren Sie die Gleichung mit (b) (Satz 13). Beachten Sie die Voraussetzung!
5. *Satz 16* Benutzen Sie (C)3. und (C) 2.
6. *Satz 17* Zweimaliges Anwenden von (C)4. und anschließend (C) 2.
7. *Satz 18* Vergleiche Beweis 7.

[13] Wenn möglich der Reihe nach, da Sie dann auf bewiesene Sätze zurückgreifen können.

[14] $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ heißt : Das Ereignis $\mathcal{A}$ zieht das Ereignis $\mathcal{B}$ nach sich, etwa $\mathcal{A} = \{2\}, \mathcal{B} = \{2, 4, 6\}$. Das Werfen einer „2“ zieht das Ereignis „gerade Zahl “ nach sich.

8. *Satz 20* Vergleiche Hilfssatz 1 und Axiom (1) und (3) von KOLMOGOROFF.

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1.

Beweis 11.

$$\begin{aligned} \textit{Wegen (A)4. ist} \quad a+0=a \quad &\Longrightarrow \quad a\,\underbrace{(a+0)}_{a} = a\cdot a + a\cdot 0 \quad \textit{(B) 6.} \\ &\Longrightarrow \quad a\cdot a = a\cdot a + a\cdot 0 \\ &\Longrightarrow \quad a\cdot 0 = 0 \quad \textit{(A) 4.} \end{aligned}$$

2.

Beweis 12.

$$\begin{aligned} b+x &= a \quad \textit{(A)5.} \\ x &= a-b \quad \textit{(Satz 1)} \\ &\Longrightarrow b+\underbrace{(a-b)}_{x} = a \quad |+(-b) \quad \textit{(Satz 5)} \\ &\Longrightarrow \underbrace{b+(-b)}_{0} + (a-b) = a+(-b) \\ &\Longrightarrow 0+(a-b) = a+(-b) \\ &\Longrightarrow a-b = a+(-b) \quad \textit{q.e.d.} \end{aligned}$$

Beweis 13.

$$\begin{aligned} \textit{Nach Voraussetzung ist} \quad a \quad = \quad b \quad &|+(-b)\textit{(Satz 5)} \\ &\Longrightarrow a-b = b+(-b) = 0 \\ &\Longrightarrow c(a-b) = c\cdot 0 = 0 \quad \textit{(Satz 12)} \\ &\Longrightarrow ca-cb = 0 \quad \textit{(B)6.} \\ &\Longrightarrow ca = cb \quad \textit{q.e.d.} \end{aligned}$$

Beweis 14.

$(\Longrightarrow)$ *Nach Voraussetzung ist* $a \cdot b = 0$.

$$\begin{aligned} \textit{Mit (B)5. ist} \quad a \cdot x &= 1 \quad |(\cdot b)\textit{(Satz 13)}, \\ &\Longrightarrow b \cdot a \cdot x = b \cdot 1 \\ &\Longrightarrow \underbrace{a \cdot b}_{=0(Vor.)} \cdot x = b \quad \textit{(B) 2. 4.} \\ &\Longrightarrow 0 \cdot x = b \\ &\Longrightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $a = 0$.

$(\Longleftarrow)$ *1. Fall:* $a = 0, b \neq 0 \Longrightarrow 0 \cdot b = 0$ *(Satz 12)*

2. Fall: $b = 0, a \neq 0 \Longrightarrow 0 \cdot a = 0$

q.e.d.

Beweis 15. *Nach (C) 3. ist* $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$. *Ebenso* $c < d \Longrightarrow b + c < b + d$. *Aufgrund der Transitivität (C)2.:*
$a + c < b + c \wedge b + c < b + d \Longrightarrow a + c < b + d$ *folgt die Behauptung.*

Beweis 16. $a < b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc$ *(C) 4.*
Ebenso $c < d \wedge b > 0 \Longrightarrow cb < bd$. *Mit (C) 2. folgt die Behauptung:*
$ac < bc \wedge bc < bd \Longrightarrow ac < bd$.

Beweis 17. *Zu zeigen:* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.
$(x \in \mathcal{A} \Longrightarrow x \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \Longrightarrow x \in \mathcal{B} \cap C)$.
$\underbrace{(x \in \mathcal{A} \Longrightarrow x \in \mathcal{B}) \Longrightarrow x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{C}}_{Voraussetzung(\star)} \Longrightarrow x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.
Da nach Voraussetzung $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} x \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{B}$ *und mit Voraussetzung* $(\star)$ *auch* $x \in \mathcal{C}$, *folgt* $x \in \mathcal{B} \wedge x \in \mathcal{C}$ *und damit* $x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.
Analog zeigt man den zweiten Teil. *q.e.d.*

Beweis 18. *Zu zeigen:* $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Longrightarrow x \in \mathcal{A}$.
$x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Longrightarrow x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B} \Longrightarrow x \in \mathcal{A}$.
und
ist $x \in A$, *so ist erst recht* $x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}$ *und damit* $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Für den Beweis von Satz 20 benötigen wir einen weiteren Satz (Hilfssatz) der Mengenalgebra:

Hilfssatz 1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$. [15]

Beweis 19. *Die Ereignisse* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ *sind aus* $\mathbb{A}$ *und* $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \emptyset$ *(disjunkte Ereignisse) . Deshalb folgt mit Axiom (3) :* $P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$. *Nach Axiom (1) ist* $P(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) \geq 0$, *woraus sofort die Behauptung folgt.*

4.2 Der indirekte Beweis

4.2.1 Grundlagen

Beim *indirekten Beweis* geht man von einer *Annahme* aus, die durch *Negation* der *Behauptung* entsteht. Aus dieser Annahme schließt man mittels gültiger Schlussregeln so lange, bis ein Widerspruch zur Annahme, zu einer Voraussetzung oder eines bereits bewiesenen Satzes entsteht.
Aufgrund des Satzes der Zweiwertigkeit und des ausgeschlossenen Widerspruchs [16] ist die Behauptung bewiesen.

Sein allgemeines Schema lautet:

Behauptung:	p gilt.
Annahme:	p gilt nicht.
Schlusskette:	p gilt nicht $\Longrightarrow \ldots q$
Feststellung:	q ist ein Widerspruch zur Annahme, Voraussetzung, zum Satz.
Folgerung:	Die Annahme, dass p nicht gilt, ist falsch, also gilt p.

Der indirekte Beweis beruht auf den Schlussregeln (4.3) bis (4.5). Er wird bei Existenzaussagen, beim Nachweis der Eindeutigkeit oder der Umkehrung von Sätzen eingesetzt.

Beispiel

1. Wir betrachten die Aussage:
   Behauptung: $p = Nx \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + 4 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3} \neq \sqrt{x-2} + 4, \quad x \geq 2$ [17]
   Anders ausgedrückt: Die Gleichung ist in $\mathbb{R}$ unlösbar. Zum Nachweis dieser Behauptung negieren wir p.
   Annahme: $\overline{p} = \exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + 4$.
   Schlusskette:
   $$\begin{aligned} \exists x : \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + 4 \quad &\Longrightarrow \quad \exists x : x+3 = x-2+8\sqrt{x-2}+16 \\ &\Longrightarrow \quad \exists x : -11 = 8\sqrt{x-2} \\ &\Longrightarrow \quad \exists x : \frac{-11}{8} = \sqrt{x-2} < 0. \end{aligned}$$

[15] Differenzmenge $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} := \{x | x \in \mathcal{B} \cap x \notin \mathcal{A}\} = \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{A}}$. Den Beweis des Hilfssatzes erbringe der Leser.
[16] Vgl. Abschnitt 1.1.
[17] Vgl. Nullquantor in Abschnitt 3.1.

Feststellung: Widerspruch,da ein Wurzelwert per Definition stets positiv ist.
Folgerung: Die Annahme ist falsch, also gilt p.

Wie hängt diese Vorgehensweise mit der Schlussregel (4.3) $(q \wedge (\overline{p} \implies \overline{q})) \implies p$ zusammen? Aus $\overline{p}$ ergab sich in der Schlusskette $\overline{q} = \exists x : \sqrt{x-2} < 0$ im Widerspruch zu $q = \forall x : \sqrt{x-2} \geq 0$. Wir haben die Implikation $\overline{p} \implies \overline{q}$ bewiesen und zusammen mit der Gültigkeit von q kann man nunmehr auf p schließen.

2. Im Beweis 1 zu Satz 1 haben wir darauf hingewiesen, dass die Eindeutigkeit für die Zahl x indirekt bewiesen wird. Es ist zu zeigen, dass x mit $a+x=b$ die *einzige* derartige Zahl ist.
   Dazu nehmen wir an, es gibt eine weitere Zahl x' mit dieser Eigenschaft, d.h. zu zwei fest vorgegebenen Zahlen a, b gibt es eine Zahl x' mit $a+x'=b$.
   Dann folgt A(5): $a+x=a+x'$ und es gibt Zahl y mit $a+y=0$.
   Weiter ist dann mit Satz 5

$$\begin{aligned} y+(a+x) &= y+(a+x') \quad \text{und mit A (3)} \\ (y+a)+x &= (y+a)+x' \\ 0+x &= 0+x' \\ x &= x' \quad \text{im Widerspruch zur Annahme} x \neq x'. \end{aligned}$$

4.2.2 Aufgaben

Durch indirekten Beweis zeige man, dass

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp x \neq 0.$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (a^2+b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2.$

Hilfen zu den Aufgaben

1. Annahme: Es gibt mindestens ein x, für das $e^x = 0$ gilt (vgl. Gleichung 3.2).
   Etwa x, x' mit $e^x = 0$ und $e^{(x')} = 0$.
   Wenn man beide Gleichungen geeignet verknüpft, folgt ein Widerspruch.

2. Annahme: Es gibt ein a und ein b derart, dass $(a^2+b^2)^2 < 4ab(a-b)^2$.
   Entwickeln Sie zum Vergleich $(a-b)^4$.

3. Multiplizieren Sie die Ungleichung mit x und verwenden Sie die Binomischen Formeln!

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1. Annahme: Es gibt mindestens ein x, für das $e^x = 0$ gilt (vgl. Gleichung 3.2).
   Etwa $x, -x$ mit $e^x = 0$ und $e^{(-x)} = 0$.
   Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man: $e^{x+(-x)} = e^0 = 0$.
   Widerspruch, denn $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$.

2. Annahme: Es gibt ein a und ein b derart, dass $(a^2 + b^2)^2 < 4ab(a - b)^2$.
   Zunächst $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.
   Quadriert man beide Seiten der Ungleichung aus:
   $$\begin{aligned} a^4 + 2a^2b^2 + b^4 &< 4a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3 \\ a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 &< 0 \\ a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 &< 0 \\ (a - b)^4 + 4a^2b^2 &< 0. \end{aligned}$$

   Widerspruch, denn die linke Seite der Ungleichung ist stets positiv.

3. Annahme: $x + \frac{1}{x} < 2$;
   $$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &< 2 \quad | \cdot x > 0 \\ x^2 + 1 &< 2x \\ x^2 - 2x + 1 &< 0 \\ (x - 1)^2 &< 0. \end{aligned}$$

   Widerspruch, denn die linke Seite ist stets positiv.

4.3 Der Induktionsbeweis

4.3.1 Grundlagen

Wenn in einer Aussage eine natürliche Zahl n als Variable auftritt, die nur einer Beschränkung unterliegt, nicht unterhalb eines gewissen Anfangswertes n_0 zu liegen, so kann man die allgemeine Gültigkeit dieser Aussage durch die Beweismethode der *vollständigen Induktion* zeigen. Es ist ein völlig unentbehrliches Werkzeug des mathematischen Schließens. Es ist damit möglich, unendlich viele Einzelaussagen in ihrer Gesamtheit zu erfassen. Der sogenannte „ Schluss von n auf $n + 1$“ bzw. „ Induktion über n “ erfährt seine Rechtfertigung durch den folgenden

Satz 21. *Eine Aussage* $p = \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : p(n)$ *, wobei* $\mathbb{N}_{n_0} = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0\}$ *ist genau dann wahr, wenn* *a) (Induktionsanfang)* $p(n_0)$ *ist wahr.*

b) (Induktionsschritt : $n \to n+1$*)* $\forall n \geq n_0 : p(n) \Longrightarrow p(n+1).$

Beweis. Es sei $\mathbb{N}^*$ die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die die Aussage $p(n)$ gilt. Dann ist mit a) $n_0 \in \mathbb{N}^*$ und mit b) aus einer Zahl n ihr unmittelbarer Nachfolger $n+1 \in \mathbb{N}^*$. Daher enthält aufgrund des PEANOSCHEN Axiomensystems (Axiom 5.) die Menge $\mathbb{N}^*$ alle narürlichen Zahlen, also $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ und somit gilt $p(n)$ für alle natürlichen Zahlen, was zu beweisen war.

Mit anderen Worten: Ist eine gegebene Aussage $p(n)$ über natürliche Zahlen n für $n = n_0$ richtig, und folgt aus der Gültigkeit der betrachteten Aussage für beliebiges n die Gültigkeit für den Nachfolger $n+1$, so gilt diese Aussage für alle natürlichen Zahlen n.

Daraus ergibt sich folgendes *Induktionsschema*:

1. Induktionsanfang
Man zeige: Es gilt $p(n_0)$.

2. Induktionsannahme
Man nehme an: $p(n)$ sei für beliebiges $n \geq n_0$ richtig.

3. Induktionsschritt $(n \to n+1)$
Man zeige: Unter der Voraussetzung 2. (Induktionsannahme) ist auch $p(n+1)$ eine wahre Aussage.

Beispiel
Zu zeigen ist die Gültigkeit der *Gaußschen Summenformel* :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq n_0 = 1.$$

1. Induktionsanfang
Zu zeigen: Es gilt $p(n_0 = 1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}, d.h. 1 = 1.$$

2. Induktionsannahme:
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq n_0 = 1$$

.

3. Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2} nach 2.} \quad +(n+1) \quad \text{(Zerlegung der Summe)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1) + (n+2)}{2} \quad q.e.d.
\end{aligned}
$$

Hinweis: Der Anfangswert, also Schritt 1 der Induktion, ist unbedingt durchzuführen. Es lassen sich leicht Beispiele konstruieren, die bei Vernachlässigung dieses Schrittes zu falschen Ergebnissen führen, etwa: *Jede natürliche Zahl ist der ihr folgenden natürlichen Zahl gleich, d.h.* $n = n + 1$ *(*)*. Nehmen wir an, es gilt $n = n + 1$, dann ist zu zeigen: $n + 1 = (n + 1) + 1 = n + 2$, was sofort durch Addition von 1 in (*) folgt. Folgerung wäre: alle natürlichen Zahlen sind gleich. Was offensichtlich falsch ist. Wo steckt der Fehler? Der Induktionsanfang wurde nicht berücksichtigt, denn $0 = 1$ ist eine falsche Aussage.

Beispiel
Beim Nachweis oder Vermutungen von Bildungsgesetzen bei Zahlenfolgen $a_n = f(n)$ lässt sich diese Beweistechnik auch erfolgreich einsetzen, da das Bildungsgesetz f von einer natürlichen Zahl n abhängt.
Wir haben schon die einfache Tatsache benutzt, dass man die Folge ungerader Zahlen 1, 3, 5, ... durch die Gleichung $a_n = 2n - 1$ beschreiben kann. Dass die Gleichung für alle n gilt, lässt sich nun leicht mit einem Induktionsbeweis über n führen:
$n = 1$: $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
Unter Beachtung des zweiten Schrittes gehen wir gleich zum Induktionsschritt 3. $(n \rightarrow n + 1)$ über, der stets die eigentliche Mühe bedeutet. Es ist zu zeigen: $a_{n+1} = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1$. Um die $(n + 1)$-te ungerade Zahl zu erhalten, genügt es, zur n-ten ungeraden Zahl die Zahl 2 zu addieren, $a_{n+1} = a_n + 2$. Nach Induktionsannahme gilt $a_n = 2n - 1$, mithin $a_{n+1} = (2n - 1) + 2 = 2n + 1$ q.e.d.

Dass die Induktion auch beim Definieren von Rechenoperationen einsetzbar ist, haben wir bereits im Beispiel 1 dieses Kapitels kennengelernt.

Der nächste und letzte Abschnitt wird uns eine weitere modifizierte Anwendung dieser Beweismethode aufzeigen, und zwar das *induktive Definieren mittels Rekursionsgleichungen.*

Ergänzend sei noch erwähnt, dass die „Philosophie " des Induktionsbeweises verallgemeinert in anderen Gebieten der Mathematik – etwa in der Automatentheorie – ein sehr hilfreiches Werkzeug ist.

4.3.2 Aufgaben

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. $\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1) = n^2$.

2. $\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}^2$ [18].

3. (Bernoullische Ungleichung) $\forall n \geq 0 : (1+\alpha)^n \geq 1+n\cdot\alpha; \alpha > -1$ fest.

4. Die Anzahl der Permutationen (Anordnungen) von n voneinander verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$ aller natürlicher Zahlen von 1 bis n.

5. Man berechne (entwickle) zunächst eine Summenformel für $s_n = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot i!)$ und zeige dann induktiv die vermutete Formel.

6. Die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 9 teilbar.

Hilfen zu den Aufgaben

1. Zerlegen Sie die Summe, indem Sie den (n+1)-ten Summanden von der Gesamtsumme abspalten.

2. Die Summe wiederum wie gehabt zerlegen und die Binomialkoeffizienten ausrechnen.

3. Multiplizieren Sie die Indulktionsvoraussetzung mit dem Faktor $(1 + \alpha)$.

4. Halten Sie eines der $(n + 1)$ Elemente gedanklich fest. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es für die restlichen n Elemente?

5. Die vermutete (durch Probieren) Formel ist $s_n = 1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n! = (n + 1)! - 1$.

6. Rechnen Sie die 3.ten Potenzen aus und formen Sie den Term so um, dass die Iduktionsannahme benutzbar ist, und ein Term übrig bleibt, der offensichtlich durch 9 teilbar ist.

---

[18] *Eulersymbol / Binomialkoeffizient* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$

Kommentierte Lösungen zu den Aufgaben

1. Induktionsanfang

   $n = 1 : \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1^2 \Longrightarrow 1 = 1^2 = 1.$

   Induktionsschritt $n \to n+1$

   Zu zeigen : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2. \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$
   Wir zerlegen geeignet die Summe, und zwar
   $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1).$
   Der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung ist nach Induktionsvoraussetzung n^2. Somit folgt $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ q.e.d.

2. Induktionsanfang

   $n = 1 : \sum_{i=1}^{1} i^3 = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2 \end{pmatrix}^2 \Longrightarrow 1^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}^2 = 1.$

   Induktionsschritt $n \to n+1$

   Zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}^2.$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^3}_{} + (n+1)^3 \\
&= \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}^2 + (n+1)^3 \\
&= (\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1))^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \\
&= \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}^2 \quad \textit{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

3. Induktionsanfang

   $n = 0 : (1+\alpha)^0 \geq 1 + 0 \cdot \alpha \Longrightarrow 1 > 1.$

   Induktionsschritt $n \to n+1$

Zu zeigen: $(1+\alpha)^n \geq 1+n\cdot\alpha \Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot\alpha$.
Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned}
(1+\alpha)^n &\geq 1+n\alpha \quad |\cdot(1+\alpha)\geq 0 \\
(1+\alpha)^{n+1} &\geq (1+na)(1+a) \\
&\geq 1+\alpha+n\alpha+n\alpha^2 \\
&\geq 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2 \\
&\geq 1+(n+1)\alpha, \quad \text{da} \quad n\alpha^2\geq 0.
\end{aligned}$$

4. Induktionsanfang

   Die Behauptung ist offensichtlich für $n=1$ und $n=2$ richtig.

   Induktionsschritt $n \to n+1$

   Zu zeigen: Wenn die Anzahl der Permutationen für n voneinander verschiedene Elemente gleich $n!$ ist, so ist die Anzahl der Permutationen für $(n+1)$ Elemente gleich $(n+1)!$.
   Denken wir uns eines der $(n+1)$ Elemente festgehalten, so gibt es für die restlichen n Elemente nach Voraussetzung $n!$ Anordnungen. Setzt man das Verfahren für alle $(n+1)$ Elemente fort, so ergeben sich $(n+1)\cdot n!$ Permutationen; das ist aber $(n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\vdots n=(n+1)!$, was zu zeigen war.

5. a) Vermutete Summenformel
   $s_1 = 1\cdot 1! = 1$
   $s_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! = 5$
   $s_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! = 23$
   $\vdots$
   $s_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ Vermutung!?.
   b) Beweis durch Induktion der Summenformel

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}(i\cdot i!) = (n+1)! - 1,$$

   $n=1$: siehe s_1.
   Zu zeigen: $s_n = (n+1)!-1 \Longrightarrow s_{n+1} = (n+2)!-1$.
   In der Tat ist

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n + (n+1)\cdot(n+1)! \\
&= ((n+1)!-1) + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)!(1+(n+1)) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1 \quad \textit{q.e.d.}
\end{aligned}$$

6. Induktionsanfang

$n = 1, n = 2, n = 3$: Die Summe $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ ist durch 9 teilbar.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$

Zu zeigen: Wenn $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar, so auch $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + n^3 \\
&\quad +9n^2 + 27n + 27 \\
&= n^3 + \underbrace{(3n^2 + 3n + 1 + n^3)}_{(n+1)^3} + \underbrace{(6n^2 + 12n + 8 + n^3)}_{(n+2)^3} \\
&\quad + \underbrace{(9n^2 + 27n + 27)}_{9(n^2+3n+3)} \\
&= (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) + 9(n^2 + 3n + 3)
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der erste Summand der rechten Seite der Gleichung durch 9 teilbar, der zweite Summand offensichtlich auch,und damit die gesamte Summe, was zu zweigen war.

4.3.3 Induktive Definition und Rekursion

Im Beispiel 1 dieses Kapitels haben wir bereits eine *induktive Definition* kennengelernt. Sie bezog sich auf die Festlegung einer Operation. Auch dasVerwenden eines Axiomensystems zur Festetzung eines Begriffs, quasi in Schritten, gehört dazu. Häufig verwendet man jedoch zur induktiven Definition von Vorschriften, d.h. Funktionen, die von natürlichen Zahlen abhängen, sogenannte *Rekursionsgleichungen*[19].
Man kann sagen, dass eine induktive Definition durch Rekursionsgleichungen der Form

$$\varphi(0) = x_0, \quad \text{Startwert} \quad \varphi(n+1) = \Phi(n, \varphi(n)), n = 0, 1, 2, \cdots$$

festgelegt ist.
Dabei ist x_0 ein gegebener beliebiger (auch reeller) Wert und Φ eine gegebene Funktion. [20]

[19] lat. recurrere: zurückgehen.

[20] In Wahrheit ist der Sachverhalt komplizierter. Er steht im Zusammenhang mit der Theorie der *Rekursiven Funktionen*. Im Falle der Addition $m + n$ wäre z.B. $x_0 = m$ und Φ die Nachfolgerbeziehung aufgrund des 5. Axioms von PEANO.

Beispiel

Die Funktion $\varphi(n) = n!$ kann induktiv durch folgende Rekursionsgleichungen definiert werden:

$$\varphi(0) = 0! \quad \text{Startwert} \quad \varphi(n+1) = (n+1)! = \Phi(n, \varphi(n)) = n! \cdot (n+1)$$

So ergibt sich etwa für $\varphi(n=4) = 4!$:
$0! = 1; 1! = (0+1)! = 0! \cdot 1 = 1! \cdot 1; 2! = (1+1)! = 1! \cdot 2 = 2; 3! = (2+1)! = 2! \cdot 3 = 6; 4! = (3+1)! = 3! \cdot 4 = 24.$
Denkt man an die *explizite* Definition [21] der Fakultät: $n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$, so erkennt man die Gleichwertigkeit der Definitionen.
Rekursionsformeln sind in der Mathematik wie auch in der Informatik - hier im Zusammenhang mit rekursiven und iterativen Prozeduren - wichtige und wirksame Werkzeuge.
Wollte man etwa ein Rechnerprogramm zur Berechnung von $n!$ schreiben, so wäre die explizite Definition nicht hilfreich, da man bei variablem n nicht einfach das Produkt von 1 bis n in die Programmzeile schreiben kann, denn was soll das Program mit einer Programmzeile $1 \cdots n$ anfangen. Das n läßt sich nicht von „ außen “ steuern. Hier – wie auch vielen anderen Fällen – hilft nur die induktive Herangehensweise mit den Mittlen der Rekursion.
Ein weiteres analoges

Beispiel
Es soll ein Proramm für die Berechnung der Summe $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, a_i \in \mathbb{R}$ geschrieben werden, wobei n durch den Anwender von außen eingegeben werden kann. Auch hier erkennt man sofort, dass eine Programmzeile der Art $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ sinnlos ist. Deshalb gehen wir von der expliziten Definition der Summe zur induktiven Definition [22] über:
Folgende Rekursionsgleichung erzeugt die gewünschte Summe $\varphi(n) = s_n$.

$$\varphi(0) = s_0 = a_0, \quad \text{Startwert}, \quad \varphi(n+1) = s_n + 1 = s_n + a_{n+1}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Wenn man der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \cdots$ eingibt, so entsteht sukzessiv die gewünschte Summe.
In der Programmierung läßt man gern den Index n weg, da er nur unnötig den Compiler [23] belastet.
Mit Hilfe eines dynamischen Gleichheitszeichens, dem *Ergibtzeichen* : „ := “ lässt sich die Rekursion wie folgt niederschreiben:

$$s := 0; \quad s := s + a_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

[21] Eine Definition der Form $A \stackrel{def}{=} B$ heißt explizit; A nennt man *Definiendum*, B *Definiens*.
[22] Die induktiven Definitionen gehören zur Klasse der *impliziten* Definitionen.
[23] Übersetzungsprogramm, welches aus dem Programmtext einen maschinenverständlichen Code erzeugt.

Funktionsweise: Im ersten Schritt wird die Zahl 0 auf den Speicherplatz mit dem Namen s abgelegt. Im zweiten Schritt ($n = 0$) ist dann $s := 0 + a_0 = a_0$ Das Ergebnis a_0 wird wieder dem Speicherplatz s zugeordnet und damit das vorherige Ergebnis 0 gelöscht. Im dritten Schritt ($n = 1$) ist $s := s + a_1 = a_0 + a_1$ usw.
Die einzelnen Schritte werden in einer „Schleife" abgearbeitet. Ist das gewünschte n erreicht, wird die Berechnung abgebrochen. Es stellt sich natürlich für den Leser sofort die Frage: Wie findet man derartige Rekursionsgleichungen?
Die Vorgehensweise wird am besten an Beispielen erläutert.

Beispiele

1. Die Potenz $a^n, a > 0, n \in \mathbb{N}$.
   Explizite Definition: $a^n \overset{def}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots n}_{n-mal}, a^0 \overset{def}{=} 1$.
   Induktive Definition: $\varphi(n) = a^n$
   Wir geben gleich noch $\varphi(n+1) = a^{n+1}$ an und zerlegen den letzten Ausdruck so, dass $\varphi(n)$ in ihm vorkommt, also

   $$\varphi(0) = a_0 = 1; \varphi(n+1) = a^{n+1} = \underbrace{a^n}_{\varphi(n)} \cdot a^1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

2. Das lässt sich für beliebige Produkte $\varphi(n) = p_n = \Pi_{i=0}^n a_i$ verallgemeinern, und zwar

   $$\begin{aligned} &\varphi(0) = p_0 = a_0; \\ &\qquad \varphi(n+1) &= p_{n+1} = \Pi_{i=0}^{n+1} a_i \\ &&= a_{n+1} \cdot \Pi_{i=0}^n a_i \\ &&= a_{n+1} \cdot \varphi(n), \quad n = 0, 1, 2 \cdots \end{aligned}$$

   Da die Eins das neutrale Element der Multiplikation ist, wäre auch $\varphi(0) = 1$ ein zulässiger Anfangswert.

3. In der Integralrechnung kann diese Methode ebenfalls erfolgreich eingesetzt werden, wenn der Integrand nicht nur von der reellen Zahl x abhängt, sondern noch den natürlichen Parameter n aufweist, etwa

   $$I_n(x) = \int x^n e^x dx,$$

   $\varphi(0) = I_0(x) = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x$,
   $\varphi(n+1) = I_{n+1}(x) = \int x^{n+1} e^x dx$.
   Mit Hilfe der partiellen Intergrationsformel $\int udv = uv - \int vdu$ und den Substitutionen $u = x^{n+1}, dv = e^x dx$
   $\Longrightarrow du = (n+1)x^n dx$ bzw.$v = e^x$ folgt:

$$\begin{aligned}\int x^{n+1}e^x dx &= x^{n+1}e^x - \int (n+1)x^n e^x dx \\ &= x^{n+1}e^x - (n+1)\underbrace{\int x^n e^x dx}_{I_n=\varphi(n)}.\end{aligned}$$

Daraus folgen die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= I_0(x) = e^x, \\ \varphi(n+1) &= I_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x - (n+1)I_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,\end{aligned}$$

$$I_2(x) = \int x^2 e^x dx,$$

$$\begin{aligned}n = 0 : \varphi(1) = I_1 &= x^1 e^x - 1 \cdot I_0 \\ &= xe^x - e^x \\ &= e^x(x-1), \\ n = 1 : \varphi(2) = I_2 &= x^2 e^x - 2 \cdot I_1 \\ &= x^2 e^x - 2e^x(x-1) \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2).\end{aligned}$$

Beachten Sie : Man kann das Integral lösen, ohne zu integrieren!

4. Abschließend betrachten wir noch ein Beispiel aus dem weiten für Anwendungen interessanten Gebiet der *Iterationsverfahren.* Auch hier kommen Rekursionsgleichungen zu Einsatz, allerdings müssen diese noch bestimmten Eigenschaften genügen,z.B.die Konvergenz des Verfahrens, was bei Programmierungsabsichten ein wesentliches Kriterium ist.
   Wir betrachten eine durch nachstehende Vorschrift induktiv definierte Zahlenfolge:

   $$a) \quad 0 < a_0 < 1 \quad b) \quad a_{n+1} = a_n \cdot (2 - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots (\star)$$

   Ziel der Untersuchung: Konvergiert die so definierte Zahlenfolge?
   Dazu erinnern wir uns an den *Satz: Wenn eine monoton wachsende (fallende) Folge a_n nach oben (unten) beschränkt ist, so besitzt sie einen Grenzwert (sie konvergiert).*
   Wir zeigen durch *Induktion* über n, dass die Folge monoton wächst und unter 1 bleibt, also nach oben beschränkt ist.

Zu Zeigen :

$$0 < a_n < 1 \Longrightarrow a_n < a_{n+1} < 1.$$

$$\begin{aligned}
a_n &< 1 \quad (nach Induktionsvoraussetzung) \\
-a_n &> -1 + 2 \\
2 - a_n &> 1 \\
a_{n+1} &= \underbrace{a_n}_{<1}\underbrace{(2 - a_n)}_{>1} \\
&\Longrightarrow a_n < a_{n+1}, \quad \text{(monoton wachsend);} \\
a_{n+1} = a_n(2 - a_n) = 2a_n - a_n^2 &= \underbrace{1 - 1}_{=0} + 2a_n + a_n^2 \\
&= 1 - (1 - 2a_n + a_n^2) \\
&= 1 - (1 - a_n)^2 < 1,
\end{aligned}$$

Folge ist konvergent mit einem Grenzwert g.

Zur Berechnung von g.
Es gelten demnach die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g.$$

Geht man mit dieser Erkenntnis in die Gleichung ($\star$) b) ein, so ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den gesuchten Grenzwert g, und zwar: $g = g(2 - g) \Longrightarrow g = 1$.

Literaturverzeichnis

[1] G.Asser, Einführung in die mathematische Logik,Teil 1, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig,1965

[2] W. Rautenberg, Einführung in die mathematische Logik, Vieweg Verlagsgesellschaft, 1996

[3] Ch. Horn / I. Kerner, Informatik, Band 2, Fachbuchverlag Leipzig, 2000

[4] W. Gellert, H. Kästner, S. Neuber, Lexikon der Mathematik, VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1990

[5] D. Hilbert, W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik,Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1949

[6] A. Monjallon, Einführung in die moderne Mathematik, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1980

[7] K. Jaspers, Von der Wahrheit, Piper, München, Zürich, 1991